

GRUPOS HIPERBÓLICOS NOTAS DEL CURSO PARA EL XXIII ERAG

JUAN ALONSO

INTRODUCCIÓN

Estas notas acompañan el mini-curso “Grupos Hiperbólicos” del XXIII Encuentro Rioplatense de Algebra y Geometría. El curso consistirá en una rápida introducción a los aspectos básicos de los grupos hiperbólicos de Gromov.

El tema central de la *teoría geométrica de grupos* es estudiar un grupo a partir de la geometría de su grafo de Cayley, o más generalmente, de los espacios métricos en los que actúa. Una de las principales instancias donde se aplica esto son los grupos hiperbólicos de Gromov, que forman una clase amplia de grupos para los cuales hay una teoría rica, además de ser objeto de investigación actual. M. Gromov introdujo una definición de espacio métrico hiperbólico que captura las propiedades esenciales de la curvatura negativa en variedades Riemannianas. Un grupo será hiperbólico cuando su grafo de Cayley sea hiperbólico según Gromov. Lo sorprendente es que esta definición geométrica implica muchas propiedades algebraicas de estos grupos. De hecho, los grupos que cumplen alguna noción de “curvatura negativa” (hiperbolicidad de Gromov y análogas) son una de las clases de grupos más generales que tienen teoría interesante (la otra son los grupos promediabiles).

Comenzaremos hablando de los grafos de Cayley vistos como espacios métricos, e introduciremos las nociones fundamentales del curso: los espacios hiperbólicos de Gromov y las quasi-isometrías, que son las equivalencias naturales entre estos espacios. Luego veremos ejemplos de propiedades algebraicas que se obtienen de la geometría: la presentación finita y el problema de las palabras en grupos hiperbólicos. Para terminar hablaremos del borde al infinito de un grupo hiperbólico, que es una de las herramientas centrales para su estudio.

El objetivo del curso es de motivación. Necesariamente será muy incompleto y se omitirán la mayoría de las demostraciones. Para cubrir esto se incluyen varias referencias, que hacen un tratamiento más sistemático del tema. ([2] y [5] son las más generales acerca de espacios métricos de “curvatura negativa”. [3] y [9] son notas cortas acerca de grupos hiperbólicos y [1] un survey acerca del borde al infinito).

1. GRAFO DE CAYLEY Y LA MÉTRICA DE LAS PALABRAS

Sea G un grupo finitamente generado y $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ un generador de G . Entonces podemos escribir todo elemento de G como un producto de los elementos de S y sus inversos. Este producto lo podemos ver como una *palabra* donde las letras son los elementos s_i y s_i^{-1} , y la concatenación corresponde a la multiplicación en el grupo. Una palabra es *reducida* si no tiene una letra y su inversa en lugares consecutivos, es decir, no contiene a $s_i s_i^{-1}$ o $s_i^{-1} s_i$ como sub-palabras. Toda palabra

se puede *reducir*: hacer las cancelaciones siempre que aparezcan letras inversas consecutivas, hasta obtener una palabra reducida. Por lo tanto, todo elemento de G puede escribirse como una palabra reducida en las s_i y s_i^{-1} (en adelante: palabra reducida en S).

Un ejemplo importante de esto son los *grupos libres*. Dado $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ un conjunto de n elementos formales, $\mathbb{F}_n = \mathbb{F}(X) = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ es el grupo formado por las palabras reducidas en las letras x_i y x_i^{-1} , donde la multiplicación es concatenar y reducir. Recibe el nombre de *grupo libre* en n generadores. El conjunto X se llama *base* de \mathbb{F}_n .

Si tengo una palabra reducida $w \in \mathbb{F}_n$, llamo $|w|$ a su largo (su cantidad de letras). Si G es un grupo con un generador $S = \{s_1, \dots, s_n\}$, llamo $w(s_1, \dots, s_n)$ al elemento de G obtenido sustituyendo a x_i por s_i en w . Esto es lo mismo que la imagen de w bajo el único morfismo $\mathbb{F}_n \rightarrow G$ que lleva cada x_i en s_i . Si $\gamma \in G$ cumple que $\gamma = w(s_1, \dots, s_n)$, se dice que la palabra reducida w representa a γ .

En general esta palabra no es única. De hecho, si vale unicidad para todo elemento entonces G es libre y S es una base (osea: $G \cong \mathbb{F}_n$ y el isomorfismo lleva S en la base X de \mathbb{F}_n).

Dado un grupo G con un generador $S = \{s_1, \dots, s_n\}$, defino el *largo* de $\gamma \in G$ respecto de S como

$$l_S(\gamma) = \min\{|w| : w \in \mathbb{F}_n, w(s_1, \dots, s_n) = \gamma\}$$

Es decir, el largo de la palabra más corta que expresa γ en el generador S . Esto permite definir una distancia en G como

$$d_S(\gamma_1, \gamma_2) = l_S(\gamma_1^{-1}\gamma_2)$$

Es fácil verificar que esto es efectivamente una métrica, y que es G -invariante a izquierda, es decir $d_S(\gamma\gamma_1, \gamma\gamma_2) = d_S(\gamma_1, \gamma_2)$. Se llama la *métrica de las palabras* de G respecto al generador S . Esto asocia al par (G, S) un espacio métrico (G, d_S) donde G actúa por isometrías.

Otra construcción estándar para un grupo G y un generador $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ finito es su *grafo de Cayley* $\text{Cay}(G, S)$. Este grafo tiene como vértices a los elementos de G , y los ejes son los de la forma $(\gamma, \gamma s_i)$ para todo $\gamma \in G$ y $s_i \in S$. Observar que $\text{Cay}(G, S)$ es conexo (pues S genera a G), y cada vértice tiene valencia $2n$. Es un grafo orientado y cada arista está etiquetada por su correspondiente generador s_i . De cada vértice sale exactamente un eje para cada elemento de $S \cup S^{-1}$, donde el eje asociado a s_j^{-1} es el eje con etiqueta s_j que llega a dicho vértice.

Todo grafo tiene una métrica natural, en la cual los ejes miden 1. Esta métrica se obtiene así: cada eje será isométrico al intervalo $[0, 1]$. Se define la longitud de un camino formado por trozos de ejes sumando las longitudes de cada uno de los trozos. La distancia entre dos puntos es el ínfimo de las longitudes de los caminos que los conectan (que es en realidad un mínimo). A los efectos de la métrica, me olvido de la orientación y las etiquetas de las aristas.

Notar que G actúa por multiplicación a izquierda en $\text{Cay}(G, S)$, por automorfismos de grafo (a diferencia de la multiplicación a derecha, que puede no respetar los ejes). Por lo tanto G también actúa por isometrías de $\text{Cay}(G, S)$.

Si restrinjo la métrica de $\text{Cay}(G, S)$ a los vértices (a G) obtengo d_S , la métrica de las palabras. Esto se ve notando que cada palabra w en S especifica un camino de ejes en $\text{Cay}(G, S)$, que empieza en 1 y sigue los ejes correspondientes a las letras que aparecen en w (en orden), llegando al vértice $w(s_1, \dots, s_n)$.

La principal ventaja del grafo de Cayley sobre (G, d_S) es ser conexo por caminos, lo que va a simplificar nuestra exposición, además de proporcionar una mejor visualización.

Ejemplos:

1. $G = \mathbb{Z}$, $S = \{1\}$. Es claro que $\text{Cay}(G, S)$ es isométrico a \mathbb{R} y G actúa por translaciones.
2. $G = \mathbb{F}_2 = \langle a, b \rangle$, $S = \{a, b\}$. Entonces $\text{Cay}(G, S)$ es un árbol, donde cada vértice tiene valencia 4. El camino (inyectivo) de la identidad a $w \in \mathbb{F}_n$ es único y corresponde a la propia palabra w . Queda $l_S(w) = |w|$.

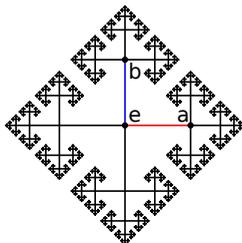


FIGURA 1. Grafo de Cayley de \mathbb{F}_2 respecto a una base (Imágen de Wikipedia)

3. $G = \mathbb{Z}^2$, $S = \{(1, 0), (0, 1)\}$. El grafo $\text{Cay}(G, S)$ es un cuadrículado en el plano, donde la métrica corresponde a la norma de la suma en \mathbb{R}^2 .

2. ESPACIOS HIPERBÓLICOS DE GROMOV

Sea (X, d) un espacio métrico. Una *geodésica* en X es una inmersión isométrica $\alpha : [a, b] \rightarrow X$. Esto es decir que se cumple

$$d(\alpha(s), \alpha(t)) = |s - t|$$

También puedo definir geodésicas con dominio en una semirrecta (*rayo geodésico*) o la recta entera.

Digo que el espacio métrico (X, d) es *geodésico* si existen geodésicas entre cualquier par de puntos de X . O sea, dados $x, y \in X$, existe una geodésica $\alpha : [0, L] \rightarrow X$ con $L = d(x, y)$, $\alpha(0) = x$ y $\alpha(L) = y$. A una tal geodésica la anoto $[x, y]$, aunque no siempre es única.

Un *triángulo geodésico* (de vértices x, y, z) es una unión de geodésicas de la forma

$$\Delta = \Delta(x, y, z) = [x, y] \cup [y, z] \cup [z, x]$$

Para $\delta \geq 0$, decimos que Δ es δ -flaco si cada lado está contenido en el δ -entorno de los otros dos.

Un espacio métrico geodésico es δ -hiperbólico si todo triángulo geodésico en X es δ -flaco. Lo que va a importarnos es la existencia de la constante δ , más que su valor. Así, un espacio es *hiperbólico* (según Gromov) si es δ -hiperbólico para algún $\delta \geq 0$. (Existen otras definiciones de δ -hiperbólico que sirven para espacios no geodésicos, pero la definición que presentamos es más simple e intuitiva).

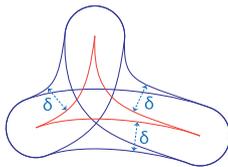


FIGURA 2. Un triángulo δ -flaco (Imágen de Wikipedia)

Ejemplos:

1. Si X es de diámetro finito, entonces es δ -hiperbólico con $\delta = \text{diam}(X)$.
2. Si X es un árbol (un grafo sin circuitos), entonces es 0-hiperbólico. En este caso la geodésica $[x, y]$ entre dos puntos $x, y \in X$ es única, y todo camino inyectivo ente x e y es una reparametrización de dicha geodésica. Notar que todo triángulo es un trípode.
3. El *plano hiperbólico* (usando el modelo del semiplano superior) es

$$\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$$

con la métrica Riemanniana $g = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$. Valen las siguientes propiedades:

- Las isometrías de \mathbb{H} que preservan la orientación son transformaciones de Möbius. Más aún:

$$\text{Isom}^+(\mathbb{H}^2) = \left\{ \frac{az + b}{cz + d} : a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \right\} \cong PSL(2, \mathbb{R})$$

Este grupo actúa transitivamente en \mathbb{H}^2 (y en su fibrado tangente unitario $T^1\mathbb{H}^2$).

- Las geodésicas de (\mathbb{H}^2, g) son las rectas y circunferencias ortogonales a \mathbb{R} (parametrizadas por longitud de arco). Estas geodésicas son bi-infinitas (por ejemplo $d_g(ia, ib) = |\log(b/a)|$ para $a, b > 0$). En particular \mathbb{H}^2 no es de diámetro finito.
 - La forma de área de g queda $d\text{Area}_g = \frac{dx dy}{y^2}$. El área de un disco de radio (hiperbólico) r es $\text{Area}_g(D_g(r)) = 2\pi(\cosh r - 1)$. En particular \mathbb{H}^2 no es de área finita.
 - Todo triángulo Δ tiene $\text{Area}_g(\Delta) \leq \pi$. Esto permite demostrar que es 2-flaco. Por lo tanto \mathbb{H}^2 es 2-hiperbólico. (2 no es el δ óptimo, pero esto no va a importarnos).
4. Se define el n -espacio hiperbólico como $\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$, $g = \frac{dx_1^2 + \dots + dx_n^2}{x_n^2}$. Valen propiedades análogas a las de \mathbb{H}^2 , en particular también es 2-hiperbólico.
 5. Un ejemplo de un espacio que no es hiperbólico es el plano Euclídeo \mathbb{R}^2 (o más generalmente \mathbb{R}^n , con $n > 1$). Para cualquier $\delta \geq 0$ tenemos triángulos que no son δ -flacos.

Los ejemplos 3 y 4 son las geometrías hiperbólicas clásicas. Son variedades Riemannianas de curvatura constante negativa, simplemente conexas. La geometría hiperbólica de Gromov es un intento (uno de los más exitosos) por abstraer la curvatura negativa para espacios métricos generales.

El ejemplo 1 muestra que la geomertía hiperbólica de Gromov es una propiedad que sólo se ve a grán escala (mayor que δ), es decir, que no impone condiciones “locales” (a escala menor que δ). Esto contrasta bastante con la curvatura negativa en variedades Riemannianas, pero en algunas situaciones esto será ventajoso. Existen otras nociones de “curvatura negativa” para espacios métricos (como la propiedad $CAT(-1)$) que son también interesantes, pero no las trataremos aquí.

Existen también varias definiciones equivalentes de hiperbolicidad de Gromov. Hemos enunciado la más directa, a travéz de los triángulos δ -flacos, y no mencionaremos más que una alternativa. Esta es la que necesitaremos para probar la presentación finita de los grupos hiperbólicos, y es a travéz de los triángulos δ -finos que defino a continuación.

Sean (X, d) un espacio métrico geodésico y $\Delta = \Delta(x, y, z)$ un triángulo geodésico en X . Armo un triángulo $\bar{\Delta} = \Delta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ en el plano Euclídeo, con los lados del mismo largo que los respectivos de Δ (esto es un *triángulo de comparación Euclídeo*). Tenemos una biyección $f : \Delta \rightarrow \bar{\Delta}$ que es isometría restricta a cada lado de Δ (recordando que $\Delta = [x, y] \cup [y, z] \cup [z, x]$). Luego tomo $\bar{p}_x, \bar{p}_y, \bar{p}_z$ los puntos de intersección de la circunferencia inscrita a $\bar{\Delta}$ con los respectivos lados $[\bar{y}, \bar{z}]$, $[\bar{x}, \bar{z}]$, $[\bar{x}, \bar{y}]$. Sean p_x, p_y, p_z sus pre-imagenes por f . Observar que $d(x, p_y) = d(x, p_z)$, $d(y, p_x) = d(y, p_z)$ y $d(z, p_x) = d(z, p_y)$.

Sea T_Δ el trípede obtenido de Δ identificando los lados $[x, p_y]$ con $[x, p_z]$, $[y, p_x]$ con $[y, p_z]$ y $[z, p_x]$ con $[z, p_y]$. Notar que p_x, p_z y p_y van a un sólo punto p . Sea $\tau_\Delta : \Delta \rightarrow T_\Delta$ el mapa cociente. (Ver figura).

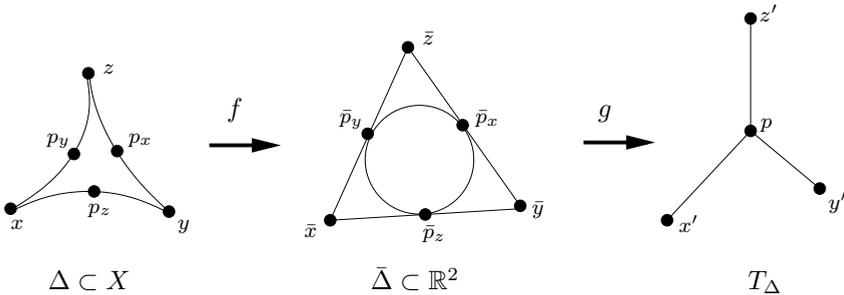


FIGURA 3. La construcción de $\tau_\Delta : \Delta \rightarrow T_\Delta$. Aquí tenemos $\tau_\Delta = g \circ f$, donde g es la misma identificación que describimos pero para $\bar{\Delta}$.

Para $\delta \geq 0$, decimos que el triángulo geodésico Δ es δ -fino si para todo $q \in T_\Delta$ tenemos $\text{diam}(\tau^{-1}(q)) \leq \delta$.

Proposición 1. *El espacio métrico geodésico (X, d) es δ -hiperbólico si y sólo si todo triángulo geodésico en X es 6δ -fino.*

3. QUASI-ISOMETRÍAS

En la sección 1 asociamos a un grupo G con un generador finito S una métrica d_S en G y un espacio métrico geodésico $\text{Cay}(G, S)$, donde G actúa por isometrías. Tanto d_S como $\text{Cay}(G, S)$ dependen fuertemente del generador S :

Ejemplo: $G = \mathbb{Z}$.

1. Si $S_1 = \{1\}$, entonces $\Gamma_1 = \text{Cay}(\mathbb{Z}, S_1)$ es isométrico a \mathbb{R} .
2. Si $S_2 = \{2, 3\}$ entonces $\Gamma_2 = \text{Cay}(\mathbb{Z}, S_2)$ es un grafo con circuitos, y es claro que la métrica es distinta de la anterior.

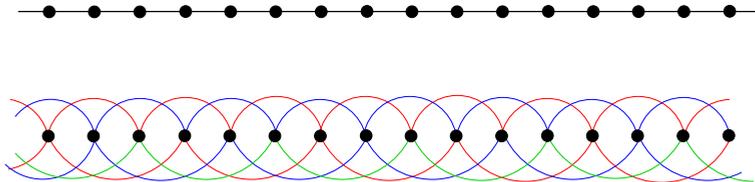


FIGURA 4. Los dos grafos de Cayley de \mathbb{Z} del ejemplo.

Arriba: Para $S_1 = \{1\}$.

Abajo: Para $S_2 = \{2, 3\}$. Los ejes superiores corresponden al generador 2 y los inferiores al 3. Los colores son sólo para facilitar la visualización.

Sin embargo, los grafos Γ_1 y Γ_2 del ejemplo se parecen cuando son vistos a gran escala (ver figura 4). Hay una relación natural entre las distintas métricas de palabras y grafos de Cayley asociados a un mismo grupo (variando el generador). Esta es la *quasi-isometría*.

Definición 2. Sean X, Y espacios métricos, $\lambda \geq 1, \epsilon \geq 0$. Una función $f : X \rightarrow Y$ es una (λ, ϵ) -quasi-isometría si cumple:

1. (f es una inmersión (λ, ϵ) -quasi-isométrica.)

$$\frac{1}{\lambda} d_X(x, y) - \epsilon \leq d_Y(f(x), f(y)) \leq \lambda d_X(x, y) + \epsilon.$$

2. (La imagen de f es ϵ -densa.) Para todo $y \in Y$ existe $x \in X$ con

$$d_Y(y, f(x)) \leq \epsilon.$$

Una función es una *quasi-isometría* cuando es una (λ, ϵ) -quasi-isometría para algunos $\lambda \geq 1, \epsilon \geq 0$. Nuevamente, el valor de los parámetros va a tener un rol secundario, lo importante es su existencia. Dos espacios métricos X e Y son *quasi-isométricos* cuando existe $f : X \rightarrow Y$ quasi-isometría. Lo anotaremos $X \sim_{q.i.} Y$.

Valen las siguientes propiedades, de demostración simple:

- La relación de quasi-isometría entre espacios métricos es de equivalencia.
- (G, d_S) es quasi-isométrico a $\text{Cay}(G, S)$: la inclusión es una $(1, 1)$ -quasi-isometría.
- Si S, S' son dos generadores finitos de un grupo G , entonces $\text{Id} : (G, d_S) \rightarrow (G, d_{S'})$ es una quasi-isometría con

$$\lambda = \text{máx}\{l_S(s'), l_{S'}(s) : s \in S, s' \in S'\} \quad \epsilon = 0$$

- También $\text{Cay}(G, S)$ es quasi-isométrico a $\text{Cay}(G, S')$ (por transitividad).
- Un automorfismo $\varphi \in \text{Aut}(G)$ es una quasi-isometría de (G, d_S) .

Se dice que dos grupos finitamente generados G_1 y G_2 son *quasi-isométricos* ($G_1 \sim_{q.i.} G_2$) si sus grafos de Cayley lo son, es decir: $\text{Cay}(G_1, S_1) \sim_{q.i.} \text{Cay}(G_2, S_2)$ para S_1, S_2 generadores finitos de los respectivos grupos. En vista de lo anterior, esto no depende de los generadores elegidos.

La quasi-isometría entre grupos es una relación más débil que el isomorfismo, como se ve a continuación.

Ejemplo: Si X es de diámetro finito, entonces es quasi-isométrico a un punto (con $\lambda = 1$, $\epsilon = \text{diam}(X)$). Entonces todo grupo finito es quasi-isométrico al grupo trivial.

Vemos entonces que la quasi-isometría no nos dice cuando dos grafos de Cayley (como espacios métricos) corresponden al mismo grupo. Sin embargo, esto puede ser ventajoso cuando nos permite estudiar propiedades de los grupos infinitos “a grán escala”, con cierta independencia de la teoría (y problemas) de los grupos finitos.

Más aún, vale que si H es un subgrupo de índice finito de G entonces $H \sim_{q.i.} G$.

Ejemplo: $G = \mathbb{F}_2 = \langle a, b \rangle$, y sea $H = \langle a, b^2, bab^{-1} \rangle \leq \mathbb{F}_2$. Entonces $H \cong \mathbb{F}_3$ y de índice finito en G . Entonces $\mathbb{F}_2 \sim_{q.i.} \mathbb{F}_3$.

En realidad es cierto que $\mathbb{F}_2 \sim_{q.i.} F_n$ para todo $n > 1$. Esto es porque todo \mathbb{F}_n con $n > 1$ puede incluirse como subgrupo de índice finito en F_2 .

Estos son ejemplos de *isomorfismo virtual*, que es la equivalencia entre grupos generada por el isomorfismo y tomar subgrupos de índice finito. Esta es otra relación importante entre grupos, tal vez la más natural que corresponda a “pasar al cociente” a los grupos finitos. Tenemos entonces que el isomorfismo virtual implica la quasi-isometría.

Problema 1. *Es cierto que si $G_1 \sim_{q.i.} G_2$, entonces G_1 es virtualmente isomorfo a G_2 ?*

En general, la respuesta es no. Pero se puede obtener una respuesta afirmativa si nos restringimos a ciertas clases de grupos. Si el problema tiene respuesta afirmativa cuando fijamos $G_1 = G$, decimos que G satisface *rigidez quasi-isométrica*. Más adelante hablaremos un poco más sobre este tema.

La herramienta fundamental para trabajar con la quasi-isometría es el *Lema de Svarc–Milnor* a continuación. Un espacio métrico es *propio* cuando toda bola cerrada es compacta (ej: grafos de valencia finita, como $\text{Cay}(G, S)$ con S finito).

Teorema 3 (Svarc–Milnor). *Sea (X, d) un espacio métrico geodésico y propio, G un grupo y $G \curvearrowright X$ una acción que cumple:*

1. *Es por isometrías ($d(\gamma \cdot x, \gamma \cdot y) = d(x, y)$).*
2. *Es propiamente discontinua, es decir, las órbitas de la acción no acumulan en X .*
3. *Es cocompacta, osea que X/G es compacto.*

Entonces vale lo siguiente:

- a) *G es finitamente generado.*
- b) *Si S es un generador finito de G y $x_0 \in X$, entonces el mapa $(G, d_S) \rightarrow (X, d)$ que manda $\gamma \mapsto \gamma \cdot x_0$ es una quasi-isometría.*

Una acción que cumple las hipótesis de este teorema se llama *geométrica*. Por transitividad, la tesis implica que también $\text{Cay}(G, S) \sim_{q.i.} (X, d)$.

Este teorema permite probar que si G es finitamente generado y $H \leq G$ es un subgrupo de índice finito, entonces $H \sim_{q.i.} G$ (y es finitamente generado). Aquí $X = \text{Cay}(G, S)$ para un generador finito S de G . Es claro que H actúa

en X por isometrías y es propiamente discontinuo (restringiendo la acción de G). Es cocompacto, porque H es de índice finito. (Observar que $\text{Cay}(G, S)/H$ es un grafo de valencia finita cuyo conjunto de vértices es G/H).

Ejemplo: \mathbb{Z}^2 actúa en el plano Euclídeo \mathbb{R}^2 por translaciones. Esta es una acción geométrica ($\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ es un toro). Entonces $\text{Cay}(\mathbb{Z}^2, S)$ (respecto a cualquier generador S) es quasi-isométrico a \mathbb{R}^2 con la métrica usual (Euclídea).

La geometría hiperbólica de Gromov tiene la virtud de preservarse por quasi-isometrías.

Teorema 4. *Si X es un espacio δ -hiperbólico e Y es geodésico con $X \sim_{q.i.} Y$, entonces Y es δ' -hiperbólico (para algún δ').*

4. GRUPOS HIPERBÓLICOS

Un grupo G finitamente generado es *hiperbólico (según Gromov)* si $\text{Cay}(G, S)$ es hiperbólico para un generador finito S de G . Por el teorema 4, esto no depende del generador S elegido. También implica que es una propiedad cerrada respecto de la quasi-isometría de grupos. Veamos los ejemplos más básicos:

1. Todo grupo finito es hiperbólico. (Sin embargo, la teoría no aportará nada nuevo a este caso).
2. Los grupos libres, \mathbb{Z} y \mathbb{F}_n para $n > 2$, son hiperbólicos. Observar que los grafos de Cayley respecto de una base son árboles (0-hiperbólicos).
3. Por el contrario, \mathbb{Z}^n para $n > 1$ no son hiperbólicos.
4. Si G_1 y G_2 son grupos hiperbólicos, entonces también lo es su producto libre $G_1 * G_2$. (Puede obtenerse directamente a partir de las definiciones).
5. Un *grupo Fuchsiano* es un subgrupo $\Gamma \leq \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ discreto, sin torsión, y con \mathbb{H}^2/Γ compacto. Tenemos lo siguiente:
 - \mathbb{H}^2/Γ es homeomorfo a una superficie orientable S_g , de género $g > 1$.
 - $\Gamma \cong \langle a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g \mid [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] = 1 \rangle$. (Para ver esto es necesario conocer el *grupo fundamental* de Topología Algebraica).
 - La acción de Γ en \mathbb{H}^2 es geométrica, por “translaciones” del plano hiperbólico, y preserva un embaldosado de \mathbb{H}^2 . Puede verse que:
 - Las baldosas son polígonos de $4g$ lados, y el cociente $\mathbb{H}^2/\Gamma \cong S_g$ puede obtenerse identificando lados “opuestos” en una baldosa.
 - Un grafo de Cayley de Γ (que corresponde a la presentación de arriba) es el grafo dual a este embaldosado.
 - Γ es quasi-isométrico al plano hiperbólico (Svarc–Milnor). Por lo tanto Γ es un grupo hiperbólico.

Existen infinitos grupos en esta clase, para cada $g > 1$. Claramente son todos quasi-isométricos. También son virtualmente isomorfos (Puede verse usando *espacios de cubrimiento*).

6. También se obtienen grupos hiperbólicos como subgrupos discretos cocompactos de $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^n)$ con $n > 1$. Si $n = 3$ y no hay torsión se denominan *grupos Kleinianos*. Los grupos Kleinianos proporcionan ejemplos de grupos que son quasi-isométricos pero no virtualmente isomorfos (usando la teoría de 3-variedades hiperbólicas de Thurston).

Además de estos ejemplos, la clase de grupos hiperbólicos es abundante. Ciertas presentaciones, llamadas de *cancelación pequeña*, dan origen a grupos hiperbólicos.

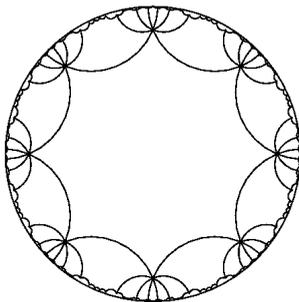


FIGURA 5. Un embaledado del plano hiperbólico, usando el modelo del disco de Poincaré. En éste caso el cociente es el *bitoro*, la superficie orientable de género 2. (Imágen de D. Van der Werf, <http://www.geom.uiuc.edu/apps/teich-nav>)

Gromov también mostró que tomando una presentación al azar (respecto a una medida de conteo sobre las presentaciones de tamaño menor que un $N > 0$), la probabilidad de que defina un grupo hiperbólico es alta, y tiende a 1 con $N \rightarrow +\infty$.

5. PRESENTACIÓN FINITA Y PROBLEMA DE LAS PALABRAS

Recordemos que si S es un conjunto, $\mathbb{F}(S)$ es el grupo libre de base S , es decir, las palabras reducidas cuyas letras son elementos de S o sus inversos formales, con el producto de concatenación y reducción. Si $R \subset \mathbb{F}(S)$, denotamos $\langle\langle R \rangle\rangle$ al subgrupo normal de $\mathbb{F}(S)$ generado por R . Usaremos la notación

$$\langle S | R \rangle = \mathbb{F}(S) / \langle\langle R \rangle\rangle$$

Una *presentación* de un grupo G es un isomorfismo $G \cong \langle S | R \rangle$ para algún conjunto S y $R \subset \mathbb{F}(S)$. Decimos que G es *finitamente presentado* si existe una presentación de G con S y R finitos.

Cuando G es finitamente generado, puedo elegir $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ finito, e identifico $\mathbb{F}(S)$ con \mathbb{F}_n . La siguiente es una observación básica, pero es útil enunciarla explícitamente.

Observación 1. Sean $G = \langle s_1, \dots, s_n | R \rangle$ y $w \in \mathbb{F}_n$. Entonces las siguientes son equivalentes:

1. $w(s_1, \dots, s_n) = 1$ (w representa la identidad en G).
2. $w \in \langle\langle R \rangle\rangle$.
3. $w = \prod_{j=1}^k w_j r_j w_j^{-1}$ con $k \geq 0$, $w_j \in \mathbb{F}_n$ y $r_j \in R$.

Los grupos hiperbólicos son finitamente generados por definición. Mostraremos que además son finitamente presentados. Esta prueba tiene el interés de obtener una propiedad algebraica (presentación finita) a partir de una propiedad geométrica del grafo de Cayley (hiperbolicidad de Gromov). Esta situación es frecuente, y el ejemplo que mostramos es una de sus instancias más básicas, aunque sigue siendo ilustrativa.

Teorema 5. *Todo grupo hiperbólico es finitamente presentado.*

Demostración:

Sea G un grupo hiperbólico. Tomo $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ un generador finito de G tal que $\text{Cay}(G, S)$ es δ -hiperbólico. Sea

$$N = \{w \in \mathbb{F}_n : w(s_1, \dots, s_n) = 1\}$$

que es el núcleo del morfismo canónico $\mathbb{F}_n = \mathbb{F}(S) \rightarrow G$ (osea que $G \cong \mathbb{F}_n/N$). Considero

$$R = \{w \in N : |w| \leq 24\delta\}$$

Claramente R es finito. El objetivo será probar que $N = \langle\langle R \rangle\rangle$, lo que implica el teorema. Para esto supondré que $\delta > 1$ (es trivial que la δ -hiperbolicidad implica la δ' -hiperbolicidad para todo $\delta' \geq \delta$).

Como las aristas de $\text{Cay}(G, S)$ están etiquetadas por los elementos de S y orientadas, resulta que un vértice de inicio y una palabra $w \in \mathbb{F}_n = \mathbb{F}(S)$ determinan un camino de ejes en $\text{Cay}(G, S)$. Este camino empieza en el vértice de inicio dado, y se obtiene concatenando sucesivamente los ejes cuyas etiquetas aparecen en w . (Entendiéndose que s_j^{-1} representa el eje de etiqueta s_j , recorrido en sentido inverso a su orientación). Durante esta prueba vamos a identificar palabras con caminos de ejes cuando el vértice de inicio sea evidente.

Tomemos $w = a_1 \cdots a_k \in N$, donde $a_j \in S \cup S^{-1}$. Entonces w representa un circuito cerrado en $\text{Cay}(G, S)$ que empieza y termina en 1. Para $j = 0, \dots, k$, considero las palabras $w_j = a_1 \cdots a_j$ y los elementos $\gamma_j = w_j(s_1, \dots, s_n) \in G$. (Observar que $\gamma_0 = \gamma_k = 1$).

Sean $\sigma_j = [1, \gamma_j]$ geodésicas en $\text{Cay}(G, S)$. Claramente se puede suponer que son caminos de ejes, pues empiezan y terminan en vértices de $\text{Cay}(G, S)$. Haciendo abuso de notación, también llamaré σ_j a las palabras que representan estos caminos.

Notar que $\sigma_0 = \sigma_k = 1$, y que tenemos

$$w = \prod_{j=1}^k \sigma_{j-1} a_j \sigma_j^{-1}$$

donde $\sigma_{j-1} a_j \sigma_j^{-1} \in N$ y define un triángulo geodésico Δ_j en $\text{Cay}(G, S)$ (de vértices 1, γ_{j-1} y γ_j y lados σ_{j-1} , σ_j y el camino de γ_{j-1} a γ_j representado por a_j). Esto corresponde a subdividir el circuito $w = a_1 \cdots a_k$ en triángulos.

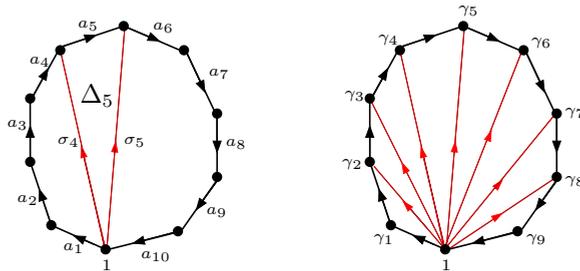


FIGURA 6. **Izquierda:** Ejemplo con $k = 10$ del circuito definido por $w = a_1 \cdots a_{10}$ en $\text{Cay}(G, S)$, y de uno de los triángulos Δ_j . **Derecha:** Subdivisión de dicho circuito en triángulos, a través de los caminos σ_j .

Ahora usaremos la δ -hiperbolicidad. Por la proposición 1, cada triángulo Δ_j es 6δ -fino. Por esto puedo subdividir Δ_j en circuitos de largo a lo sumo 24δ como sigue: Tomo puntos en los lados σ_{j-1} y σ_j a partir de 1 y espaciados regularmente a 6δ . Como Δ_j es 6δ -fino, puedo conectar los puntos correspondientes por caminos de largo a lo más 6δ . (Es claro que la cota no es óptima. Tiene la ventaja, puramente visual, de que los circuitos no degeneran).

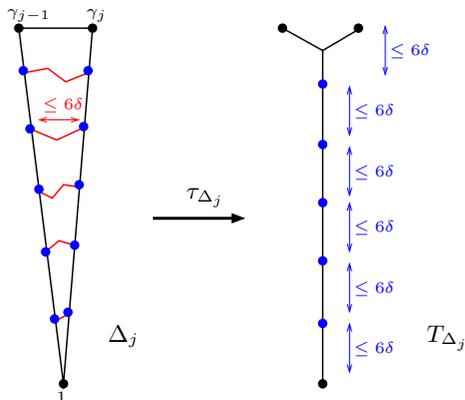


FIGURA 7. Subdivisión de Δ_j en circuitos de longitud $\leq 24\delta$.

Sean $r_{j,l}$, con $l = 1, \dots, L_j$ palabras que representen estos circuitos. Entonces podemos escribir

$$\sigma_{j-1}a_j\sigma_j^{-1} = \prod_{l=1}^{L_j} v_{j,l}r_{j,l}v_{j,l}^{-1}$$

para elementos $v_{j,l} \in \mathbb{F}_n$ convenientemente elegidos.

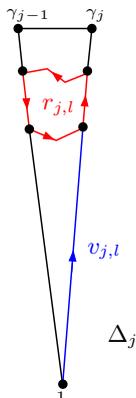


FIGURA 8. Un ejemplo genérico de los caminos en $\text{Cay}(G, S)$ que definen los elementos $r_{j,l}$ y $v_{j,l}$.

Como $|r_{j,l}| \leq 24\delta$, tenemos que $\sigma_{j-1}a_j\sigma_j^{-1} \in \langle\langle R \rangle\rangle$ para cada j , y por esto $w \in \langle\langle R \rangle\rangle$.

Esto muestra que $N \subseteq \langle\langle R \rangle\rangle$, y la otra inclusión es trivial. \square

Ahora hablaremos del *problema de las palabras*, que es uno de los problemas clásicos en la teoría de grupos infinitos, finitamente presentados. Sea G un grupo cualquiera (finitamente presentado) dado por la presentación $\langle s_1, \dots, s_n | r_1, \dots, r_p \rangle$. Resolver el *problema de las palabras* para G es obtener un algoritmo que pueda decidir (en tiempo finito) si una palabra $w \in \mathbb{F}_n$ representa la identidad en G . Osea, decidir si $w \in \langle \langle r_1, \dots, r_p \rangle \rangle$.

El problema de las palabras es equivalente a decidir la igualdad en G , osea, decidir si dos palabras $v, w \in \mathbb{F}_n$ representan el mismo elemento en G . Esto se reduce al problema de las palabras aplicado a wv^{-1} . No es posible resolver el problema en general. De hecho, hay ejemplos de grupos donde se puede probar que no existe un algoritmo para resolver el problema de las palabras. Sin embargo, sí se puede resolver para grupos hiperbólicos.

La prueba del teorema 5 permite construir un algoritmo para resolver el problema de las palabras en un grupo hiperbólico. Sea G es un grupo hiperbólico y $\langle s_1, \dots, s_n | r_1, \dots, r_p \rangle$ una presentación de G . Recordemos que en la prueba de 5 escribimos cualquier $w \in \langle \langle r_1, \dots, r_p \rangle \rangle$ de largo $|w| = k$ como

$$(E1) \quad w = \prod_{j=1}^k \prod_{l=1}^{L_j} v_{l,j} r_{l,j} v_{l,j}^{-1}$$

donde $r_{l,j} \in \{r_1, \dots, r_p\}$, $v_{j,l} \in \mathbb{F}_n$. Observar que los caminos σ_j de la prueba son geodésicas entre 1 y los vértices del circuito definido por w , por lo que deben tener largo menor a k . Repasando la prueba de 5 podemos ver que $L_j \leq |\sigma_j| \leq k$ y $|v_{j,l}| \leq |\sigma_j| \leq k$. En conclusión, el número de factores en la descomposición E1 de w está acotado por k^2 y el largo de los elementos que conjugan está acotado por k .

Si queremos saber si $w \in \mathbb{F}_n$ está en $\langle \langle r_1, \dots, r_p \rangle \rangle$, basta hacer una lista con todas las palabras de la forma

$$\prod_{i=1}^m v_i r_{j_i} v_i^{-1}$$

con $m \leq |w|^2$, $|v_i| \leq |w|$, y ver si w está en esta lista. Como la lista es finita (para cada $w \in \mathbb{F}_n$), esto nos dá un algoritmo que decide si w está o no en $\langle \langle r_1, \dots, r_p \rangle \rangle$.

El algoritmo que vimos no es el más eficiente. Sin embargo, ilustra la obstrucción para resolver el problema de las palabras en grupos más generales, que es acotar el número de factores en una descomposición como en E1. Existen métodos más elegantes y eficientes que son específicos a los grupos hiperbólicos (ver [2]).

6. BORDE AL INFINITO

El *borde al infinito* es una de las herramientas más útiles para trabajar con grupos y espacios hiperbólicos de Gromov. Si (X, d) es un espacio métrico δ -hiperbólico, defino

$$\partial X = \{r : [0, +\infty) \rightarrow X \text{ rayo geodésico}\} / \sim$$

donde dos rayos geodésicos son equivalentes si están a distancia de Hausdorff finita. Es decir, $r_1 \sim r_2$ si existe $K \geq 0$ tal que para todo $t \geq 0$ existe $t' \geq 0$ con $d(r_1(t), r_2(t')) \leq K$ y existe $t'' \geq 0$ con $d(r_1(t''), r_2(t)) \leq K$.

Observar que si r_1 es un rayo geodésico, y $r_2(t) = r_1(t + L)$ ($L \in \mathbb{R}$ cualquiera) entonces $r_1 \sim r_2$. Esto se llama *reparametrizar* el rayo geodésico r_1 .

Ejemplos:

1. Si $\text{diam}(X) < \infty$ entonces $\partial X = \emptyset$. (No hay rayos geodésicos).
2. Si X es un árbol, dos rayos geodésicos son equivalentes si y sólo si tienen reparametrizados que coinciden eventualmente. Por ejemplo, si $X = \mathbb{R}$ es una línea, podemos identificar su borde con un par de puntos: $\partial\mathbb{R} = \{-\infty, +\infty\}$.
3. En \mathbb{H}^2 todo rayo geodésico converge a un punto de $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Puede verse que $r_1 \sim r_2$ si y sólo si $\lim_{t \rightarrow +\infty} r_1(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} r_2(t)$ en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Por esto podemos identificar $\partial\mathbb{H}^2$ con $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.
4. Lo mismo vale para \mathbb{H}^n , identificando $\partial\mathbb{H}^n$ con $\mathbb{R}^{n-1} \cup \{\infty\}$.

El borde al infinito de un espacio métrico hiperbólico es un espacio topológico, con una topología natural que definiremos a continuación. En los ejemplos anteriores esta topología es la intuitiva, así que tendremos que $\partial\mathbb{R} = \{-\infty, +\infty\}$ y $\partial\mathbb{H}^n = S^{n-1} = \mathbb{R}^{n-1} \cup \{\infty\}$.

Si X es δ -hiperbólico y $x \in X$ es un punto base, podemos restringir la definición anterior para rayos geodésicos que empiezen en x . Sea

$$\partial_x X = \{r : [0, +\infty) \rightarrow X \text{ rayo geodésico con } r(0) = x\} / \sim$$

con la misma relación \sim anterior. Puede probarse que el mapa natural $\partial_x X \rightarrow \partial X$ es biyectivo.

Si $y, z \in X$ su *producto de Gromov* respecto al punto base x es

$$(y|z)_x = \frac{1}{2}(d(x, y) + d(x, z) - d(y, z))$$

La idea intuitiva es que $(x|y)_x$ mide la distancia a partir de la cual dos geodésicas $[x, y]$ y $[x, z]$ comienzan a separarse a gran escala respecto de δ . Más precisamente, si $\Delta = \Delta(x, y, z)$ es un triángulo geodésico fino, y $\tau_\Delta : \Delta \rightarrow T_\Delta$ es el mapa cociente sobre el trípode correspondiente, entonces $(x|y)_x$ aproxima la distancia entre $x' = \tau_\Delta(x)$ y el centro del trípode T_Δ . Es fácil ver que coinciden en el caso en que X es un árbol.

Observación 2. *Puede probarse que un espacio geodésico X es δ -hiperbólico si y sólo si para todo $x, y, z, w \in X$ se cumple*

$$(y|z)_x \geq \min\{(y|w)_x, (z|w)_x\} - \delta$$

Esta desigualdad permite dar una definición de δ -hiperbolicidad para espacios no necesariamente geodésicos. No tomamos este camino por ser menos intuitivo.

El producto de Gromov puede extenderse para rayos geodésicos que empiezan en x tomando límite. Puede verse que este límite sólo depende de las clases en $\partial_x X$ de los rayos geodésicos. Entonces, para $\zeta, \eta \in \partial_x X$ tomo rayos geodésicos r_1 y r_2 que los representan (respectivamente) y defino

$$(\zeta|\eta)_x = \lim_{t \rightarrow +\infty} (r_1(t)|r_2(t))_x$$

Este producto de Gromov también expresa la distancia a partir de la cual los rayos geodésicos comienzan a separarse apreciablemente. Por esto consideramos que dos rayos están cerca si su producto de Gromov es grande. Más formalmente, definimos una base de entornos de $\zeta \in \partial_x X$ como

$$V_\zeta(R) = \{\eta \in \partial_x X : e^{-(\zeta|\eta)_x} < R\}$$

para $R > 0$. Esto dá una topología en $\partial_x X$. Si X es propio (bolas cerradas compactas), puede probarse que no depende del punto base $x \in X$.

Ejemplos:

1. $\partial\mathbb{R} = \{-\infty, \infty\}$ son dos puntos discretos.
2. Sea $X = \text{Cay}(\mathbb{F}_n, S)$ donde $n > 1$ y S es una base de \mathbb{F}_n . Entonces X es un árbol infinito, de valencia $2n$. Si $x \in X$ es un punto base y $\zeta, \eta \in \partial_x X$, entonces los rayos geodésicos empezando en x que representan a ζ y η son únicos, y $(\zeta|\eta)_x$ es la longitud del segmento común entre los dos. No es difícil ver que ∂X es un conjunto de Cantor.
3. Para $X = \mathbb{H}^n$ también se cumple que para cada $\zeta \in \partial_x X$ hay un único rayo geodésico que empieza en x y representa a ζ . Más aún, si $T_x^1 \mathbb{H}^n$ son los vectores tangentes a \mathbb{H}^n en x de norma 1 (en la métrica hiperbólica de \mathbb{H}^n), tenemos una biyección

$$\varphi : T_x^1 \mathbb{H}^n \rightarrow \partial_x X$$

que a $v \in T_x^1 \mathbb{H}^n$ le asocia $\lim_{t \rightarrow +\infty} r(t)$ donde r es la única geodésica con $r(0) = x$, $\dot{r}(0) = v$. Puede probarse que $(\varphi(v)|\varphi(w))_x$ tiende a $+\infty$ cuando el ángulo entre v y w tiende a 0. Por lo tanto φ es un homeomorfismo. Obtenemos $\partial \mathbb{H}^n \cong S^{n-1}$.

En general, si X es un espacio δ -hiperbólico y propio, entonces ∂X es compacto y X tiene una compactificación de la forma $\bar{X} = X \cup \partial X$.

Teorema 6. *Si X e Y son espacios hiperbólicos de Gromov propios, entonces toda quasi-isometría $f : X \rightarrow Y$ induce un homeomorfismo $f_\infty : \partial X \rightarrow \partial Y$.*

Por lo tanto puedo definir el borde al infinito para un grupo hiperbólico G , como $\partial G = \partial \text{Cay}(G, S)$ para cualquier generador finito S de G . Además es un invariante de quasi-isometría.

Ejemplos:

1. $\partial\mathbb{Z} = \{-\infty, +\infty\}$.
2. $\partial\mathbb{F}_n$ es un conjunto de Cantor.
3. Los grupos Fuchsianos (grupos fundamentales de superficies de género $g > 1$) tienen borde S^1 .
4. Los grupos Kleinianos (grupos fundamentales de 3-variedades hiperbólicas) tienen borde S^2 .

A través del borde al infinito vemos que cada punto del ejemplo corresponde a clases de quasi-isometría distintas. Sin embargo, es un problema abierto decidir si la topología del borde determina la clase de quasi-isometría del grupo. En los tres primeros casos la respuesta es afirmativa:

1. Si $\partial G = \{x, y\}$ entonces G es virtualmente cíclico (virtualmente isomorfo a \mathbb{Z}).
2. Si ∂G es un Cantor, entonces G es virtualmente libre. (Consecuencia del Teorema de Stallings. Ver [1]).
3. Si $\partial G = S^1$, G es virtualmente Fuchsiano. (Casson, Freden, Gabai, Jungreis, Tukia. Ver, por ejemplo [4]).

Determinar que grupos hiperbólicos tienen borde S^2 es un problema abierto. La *conjetura de Cannon* afirma que estos son los grupos Kleinianos. Markovic [7] obtuvo recientemente (2013) una reducción de este problema.

El borde de un espacio métrico hiperbólico y propio tiene más estructura que la de espacio topológico. Es metrizable, con las llamadas *métricas visuales*. Si X es δ -hiperbólico y $x \in X$ es un punto base, una métrica d_x en ∂X es visual respecto de x si

$$C_1 e^{-(\zeta|\eta)_x} \leq d_x(\zeta, \eta) \leq C_2 e^{-(\zeta|\eta)_x}$$

para algunas constantes $C_1, C_2 > 0$. Puede probarse la existencia de métricas visuales, pero no son únicas y dependen del punto base. Dos métricas visuales distintas de ∂X (pueden venir del mismo o de distinto punto base) son *quasiconformemente equivalentes*. No definiremos estas nociones, pero es posible dar una *estructura quasiconforme* al borde de un espacio δ -hiperbólico. Cuando se considera esta estructura en el borde de un grupo hiperbólico, sí es posible recuperar el grupo (a menos de quasi-isometría) a partir de su borde (Paulin [8]).

Otro problema abierto es determinar que espacios topológicos pueden ser borde de un grupo hiperbólico. Ya mencionamos que deben ser compactos y metrizable. M. Kapovich y B. Kleiner [6] resolvieron este problema restringido a espacios conexos de *dimensión topológica* 1 y sin puntos de corte local (lo que saca, por ejemplo, el círculo). Obtuvieron que los únicos espacios en esta clase que son borde de un grupo hiperbólico son la *alfombra de Sierpinski* y la *curva de Menger*.

Es mucho más lo que puede decirse del borde de los grupos hiperbólicos. Para un pantallazo más amplio se recomienda [1].

REFERENCIAS

- [1] N. Benakli and I. Kapovich, *Boundaries of hyperbolic groups*. Preprint (2002). Disponible en ArXiv: <http://arxiv.org/abs/math/0202286>
- [2] M. Bridson and A. Haefliger, *Metric Spaces of non-positive curvature*. Springer, 1964.
- [3] D. Calegari, *The ergodic theory of hyperbolic groups*. Geometry and topology down under. Contemporary Mathematics No. 59 (2013).
- [4] A. Casson and D. Jungreis, *Convergence groups and Seifert fibered 3-manifolds*. Invent. Math. 118, No. 3 (1994). Pág. 441–456.
- [5] E. Ghys and P. de la Harpe (Eds.), *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*. Birkhäuser Boston Inc. 1990.
- [6] M. Kapovich and B. Kleiner, *Hyperbolic groups with low-dimensional boundary*. Ann. Sci. Ecole Normale Sup. 33, No. 5 (2000). Pág. 647–669.
- [7] V. Markovic, *A criterion for Cannon's conjecture*. GAFA Vol. 23 No. 3 (2013). Pág. 1035–1061.
- [8] F. Paulin, *Un groupe hyperbolique est déterminé par son bord*. J. London Math. Soc. 54 (1996). Pág 50–74.
- [9] H. Short (Ed.), *Notes on word hyperbolic groups*. Group theory from a geometrical viewpoint (Trieste, 1990). World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1991. Pág. 3–63.

CENTRO DE MATEMÁTICA, FACULTAD DE CIENCIAS
 UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA, URUGUAY
 E-mail address: juan@cmat.edu.uy