Publicaciones Matemáticas del Uruguay
Volumen 17, Julio 2019, Páginas 43–55
S 0797-1443

LA REGULARIDAD DE LOS POLIEDROS EN LA MIRADA MODERNA

ÁNGEL PEREYRA (FIGURAS: ANALÍA CHANQUET)

Resumen. Estas notas reflejan el cursillo aludido en el título, aprovechamos la oportunidad para ampliar ligeramente el contenido de la última clase. En síntesis el objetivo del cursillo fue: analizar algunas variaciones de la noción clásica de poliedro regular, teniendo como concepto moderno unificador el de grupo de simetrías. Con este cometido comezamos revisando la noción de poliedro convexo para precisar el concepto de sólido platónico, a estos les buscamos sus grupos de simetrías. La segunda clase la dedicamos a presentar una visión panorámica de la obtención de todos los poliedros semirregulares, también observamos a sus duales (los sólidos de Catalán). Finalmente ampliando adecuadamente la noción de poliedro mostramos cómo caracterizar la familia de todos los poliedros totalmente transitivos, se consigue una familia que consta de catorce poliedros entre los cuales están los cinco sólidos platónicos.

1. Introducción

Estas notas mantienen el espíritu de su versión preliminar: servir de apoyo y promover en los cursillistas -o lectores- una actitud imaginativa y constructiva, conociendo de antemano el propósito y sentido de cada clase, antes que el desarrollo detallado de las mismas. Así que una debilidad -¿o no?- de este trabajo es que las demostraciones sólo están esbozadas o directamente dejadas a cargo del lector. Espero que este material sea de lectura fluida y genere ganas de estudiar más sobre un tema bonito, antiguo y a la vez susceptible de revisiones y generalizaciones.

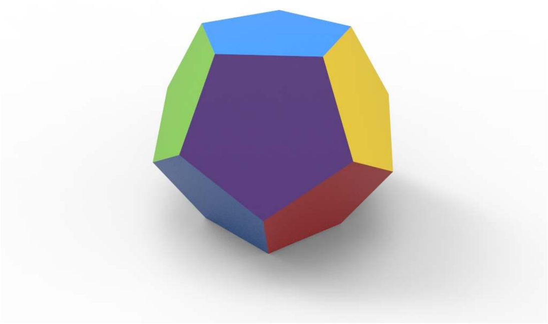


Figura 1. El Dodecaedro, uno de los cinco sólidos platónicos.

Como ya dijimos vamos a analizar algunas variaciones de la noción clásica de poliedro regular, teniendo como concepto moderno unificador el de grupo de simetrías. Cabe agregar, simplificando mucho, que paralelamente a la exploración de la regularidad, la noción de poliedro ha ido evolucionando hasta el punto en que el objeto geométrico visualizable es la realización ("proyección" a $\mathbb{R}^3$) de un objeto combinatorio abstracto: una estructura de caras que verifica ciertas propiedades de incidencia en relación al conjunto de las aristas y vértices de cierto grafo.

Figura 2. Tres volúmenes poliédricos "muy regulares", el primero convexo y los otros no.

La segunda clase la dedicamos a mostrar cómo construir exhaustivamente la familia de los poliedros semirregulares (o arquimedianos). Contrariamente a lo que se podría suponer no todo poliedro semirregular se obtiene truncando algún sólido platónico, la forma natural para obtener a varios de ellos es por "deformación". Además vimos cómo la noción de grupo de simetría permite arribar a una formulación precisa del concepto de poliedro semirregular y superar ciertas ambigüedades históricas. Al finalizar la clase dimos un vistazo rápido a la familia dual de la de los poliedros semirregulares, dejando de lado a los prismas y a los antiprismas, se obtienen los sólidos de Catalán, fue una oportunidad más de ver la utilidad de la dualidad.

En la tercera clase usamos en profundidad el concepto de transitividad total en los poliedros, este concepto es un debilitamiento de la noción estándar de regularidad. Un poliedro (no necesariamente convexo, eventualmente compuesto) se dice totalmente transitivo si su grupo de simetrías directas lleva cualquier vértice (arista o cara) en cualquier otro vértice (arista o cara, respectivamente). Apoyándonos en cuestiones básicas de las acciones de grupos, esbozamos la demostración de que son 14 estos poliedros (los platónicos, cuatro estrellados y cinco compuestos). Finalizamos el cursillo haciendo algunos comentarios sobre la evolución de la noción de poliedro, mencionando alguna de sus formulaciones más recientes.

2. Primera clase: Poliedros convexos. Sólidos platónicos y sus grupos de simetría.

Antes que nada, convendría tener al alcance de las manos realizaciones 3D de los cinco sólidos platónicos, la manipulación de los mismos mejora nuestra capacidad de visualización y argumentación.

Lo primero será hacer una revisión rápida del concepto de poliedro convexo, asumiré que los cursillistas (o lectores) tienen cierto conocimento básico del asunto,

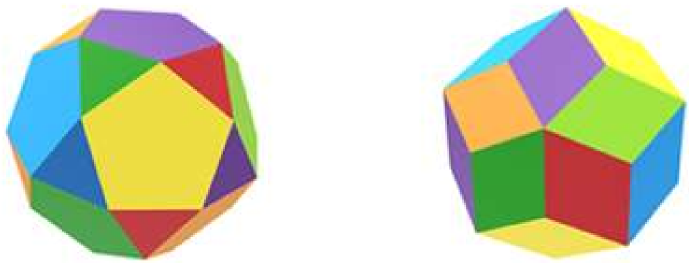


FIGURA 3. Dos poliedros convexos “parcialmente regulares”.

no abundaré en detalles. Podemos pensar a un poliedro convexo como la intersección de un número finito de semiespacios cerrados de $\mathbb{R}^3$ tal que esta intersección resulte de interior no vacío y acotada. En definitiva, lo esencial ahora es comprender que dado un poliedro convexo están perfectamente determinadas sus caras, sus aristas y sus vértices. Los vértices, aristas y caras son las intersecciones 0, 1 y 2 dimensionales (respectivamente) de los planos de apoyo del poliedro con el propio poliedro. No necesitamos un conocimiento detallado de esto para el cursillo, con una idea general intuitiva alcanza. Vale el resultado de Euler $V - A + C = 2$ que relaciona el número de vértices, aristas y caras de cualquier poliedro convexo. Si no lo han hecho antes, pueden verificar este teorema para el icosaedro y el dodecaedro. Más adelante apelaremos a una consecuencia de este resultado, por eso lo menciono.

Es muy conocido el hecho de que existen exactamente cinco tipos de poliedros regulares convexos: el tetraedro, hexaedro (cubo), octaedro, dodecaedro e icosaedro. Para ser más precisos deberíamos decir tetraedro regular, etc..

Acá hay varias cuestiones que conviene considerar, no vamos a profundizar en todas ellas:

1. ¿Qué significa que un poliedro convexo sea regular?

2. Si respondimos i. surge otra pregunta,¿cómo estamos seguros de que los cinco poliedros mencionados arriba efectivamente existen y que no fuimos “engañados” por sugerentes dibujos o volúmenes?

3. ¿Cómo estamos seguros de que no hay más que cinco poliedros regulares convexos?

Sobre 1: seguramente acordaremos rápidamente que las caras de un tal poliedro deben ser todas polígonos regulares convexos congruentes, es un buen ejercicio obtener ejemplos en los que se vea que esta condición no sería suficiente. Una familia interesante de observar es la de los deltaedros, está formada por cinco tipos de poliedros convexos no regulares cuyas caras son triángulos equiláteros congruentes, algunos de estos poliedros están representados en las figuras 4 y 8. Una condición adicional que se puede imponer para obtener la regularidad es que todos los ángulos sólidos del poliedro sean congruentes. Observen esto en los poliedros platónicos. Ocurre que existen diferentes condiciones equivalentes que aseguran la regularidad tal como se la conceptualizó “inicialmente”, algunas de ellas se presentan en el siguiente enunciado.

Teorema 1. *Si $\mathcal{P}$ es un poliedro convexo, cuyas caras son polígonos regulares congruentes, entonces son equivalentes:*

(a) todos los vértices de $\mathcal{P}$ están en una esfera;
(b) todos los ángulos formados por caras adyacentes son congruentes;
(c) todos los ángulos sólidos son congruentes;
(d) todos los vértices están rodeados por el mismo número de caras.

Sobre la demostración: es esclarecedor observar que la condición (a) es de naturaleza global y en cambio las demás son de naturaleza local, las implicaciones (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (d) pueden ser demostradas de manera relativamente sencilla usando conocimientos básicos de geometría euclidiana del espacio tridimensional, en cambio la implicación (d) $\Rightarrow$ (a) -el pasaje de lo local a lo global-, es sustancialmente más difícil.

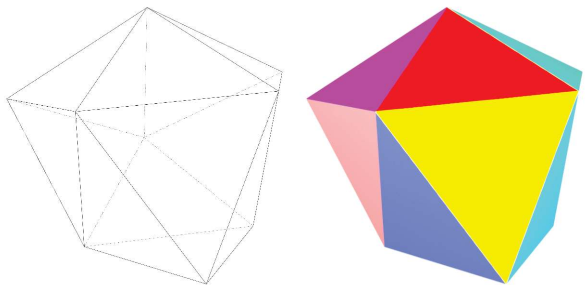


Figura 4. El deltaedro de 14 caras.

Sobre 2 y 3: es sabido que la suma de los ángulos planos que forman un ángulo sólido estrictamente convexo -que no contiene rectas- es menor que cuatro rectos, de aquí se deduce que un poliedro convexo regular sólo puede tener como caras triángulos (equiláteros), cuadrados o pentágonos (regulares). Los cinco sólidos platónicos son realizaciones de estas opciones, hay distintos procedimientos geométricos que permitem probar la existencia de todos ellos. Por ejemplo un análisis atento del lado izquierdo de la figura 7 permite probar la existencia del dodecaedro partiendo de un cubo. La figura 5 ilustra la construcción del icosaedro a partir del odecaedro -y a la inversa- usando un método que se explica a continuación.

Es posible dado un poliedro convexo $\mathcal{P}$ construir su poliedro dual $\mathcal{P}^*$, para el caso en el que el poliedro tenga todos sus vértices en una esfera y todas sus aristas congruentes, su dual puede obtenerse así : dado un vértice v de $\mathcal{P}$ se toman los puntos medios de las aristas incidentes en v estos puntos son los vértices de un polígono D inscriptible (en una circunferencia C), las tangentes a esta circunferencia C en los vértices de D definen (envuelven) un polígono convexo que es la cara de $\mathcal{P}^*$ que está asociada a v; haciendo esto con cada vértice de $\mathcal{P}$ conseguimos todas las caras de $\mathcal{P}^*$. Es sencillo verificar que: el tetraedro es autodual, el octaedro y el cubo están en dualidad, el icosaedro y el dodecaedro también están en dualidad. Es instructivo comprender la conveniencia de las condiciones que le impusimos al poliedro $\mathcal{P}$.

El último tópico de esta primera clase: la noción de grupo de simetrías. Como dijimos en la introducción el grupo de simetrías de un conjunto de puntos S de $\mathbb{R}^3$, está formado por los movimientos que dejan invariante a S. Se entiende que

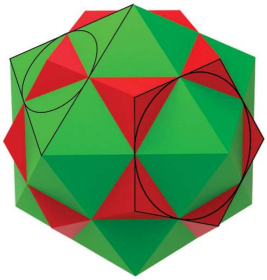


Figura 5. El Dodecaedro (rojo) y el Icosaedro (verde) son duales.

la operación del grupo es la composición de movimientos. Es un ejercicio sencillo verificar que efectivamente el enunciado anterior define un grupo. Este grupo, que puede ser finito o no, es un subgrupo del grupo de todos los movimientos de $\mathbb{R}^3$. A veces nos restringiremos a considerar movimientos directos solamente.

Nuestro objetivo ahora es dar alguna descripción de los grupos de simetrías directas de los poliedros platónicos. Un primera observación que nos simplifica el trabajo es que aquellos poliedros que estén en dualidad tendrán el mismo grupo de simetrías. La estrategia es sencilla inicialmente, nos concentramos en los movimientos directos que dejan invariante al tetraedro, los identificamos explícitamente y los contamos: son 12 (identidad incluída), estos movimientos corresponden a las permutaciones pares de cuatro elementos (los vértices); si consideramos movimientos directos y no directos son 24. La última afirmación se deduce aplicando el resultado siguiente.

Ejercicio 1. *Si G es un grupo finito de movimientos que contiene algún movimiento no directo y H es el subgrupo de los movimientos directos de G, entonces G tiene el doble de elementos que H.*

Figura 6. El Octaedro.

El siguiente paso es considerar el octaedro, se constata que su grupo de simetrías directas tiene 24 elementos (lo mismo le ocurre al cubo por dualidad).

Para el dodecaedro el conteo de sus simetrías directas da 60 (lo mismo le ocurre al icosaedro por dualidad).

Con un poco más de trabajo puede decirse bastante más sobre la estructura de los grupos de simetrías directas del octaedro y del dodecaedro.

En el caso del octaedro podemos observar que si coloreamos con 4 colores sus caras, usando un color por cara y poniendo el mismo color en caras opuestas (las que son paralelas), resulta que cada simetría directa del octaedro se corresponde biunívocamente con una permutación de los colores, así que abstractamente el grupo es el de las permutaciones de 4 elementos. Es un ejercicio instructivo visualizar la correspondencia mencionada.

El caso del dodecaedro, es un poquito más sutil, se observa que en el dodecaedro se pueden inscribir cinco cubos (cuyos vértices son vértices del dodecaedro), esto se representa en la figura 7 . Con un análisis cuidadoso se verifica que las simetrías directas del dodecaedro se corresponden biunívocamente con ciertas permutaciones (las pares) de los cubos. Para comprender esto sugiero dibujar sobre las caras de un dodecaedro (en 3D) las aristas de los cubos y verificar las siguientes afirmaciones: una diagonal de una cara del dodecaedro determina unívocamente un cubo inscripto; las rotaciones de orden 5 (de ejes que pasan los centros de caras opuestas del dodecaedro) se corresponden con las permutaciones circulares de los cinco cubos; las rotaciones de orden 3 (de ejes que contienen vértices opuestos del dodecaedro) se corresponden con las permutaciones circulares de tres cubos -los cubos que tienen vértices en el eje de rotación quedan invariantes-; las rotaciones de orden 2 (de ejes que pasan por los puntos medios de aristas opuestas del dodecaedro) se corresponden con las permutaciones tales que dadas dos parejas disjuntas de cubos intercambian los cubos en cada pareja y dejan invariante al quinto cubo.

Las consideraciones anteriores dan lugar a la pregunta: ¿hay otros grupos finitos de simetrías directas tridimensionales? En la introducción adelantamos que un resultado debido a F. Klein da una respuesta concluyente a esa pregunta.

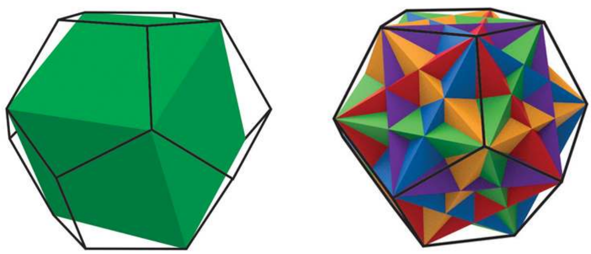


FIGURA 7. Un cubo y cinco cubos inscriptos en el Dodecaedro.

Teorema 2. *Un grupo finito de simetrías directas de $\mathbb{R}^3$ o es el grupo de las simetrías directas de un sólido plátonico, o es generado por una rotación de orden n (grupo cíclico), o es generado por dos rotaciones de ejes perpendiculares, una de orden n y otra de orden 2 (grupo diedral).*

Es un ejercicio instructivo dar ejemplos de poliedros cuyos grupos de simetrías sean cíclicos o diedrales. También sugerimos determinar (en el sentido del teorema de Klein) los grupos de simetrías (directas) de los poliedros de la figura 9.

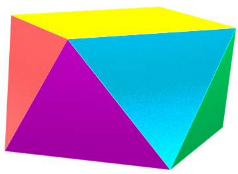
3. SEGUNDA CLASE: POLIEDROS SEMIRREGULARES. SÓLIDOS DE CATALÁN.

Pappus le atribuye a Arquímedes el descubrimento de los poliedros semirregulares. El análisis que vamos a esbozar se basa en [1] que a su vez es una reformulación de lo escrito por Kepler (1571-1630) sobre esta cuestión.

Vamos a comenzar con una definición provisoria de poliedro semirregular, la cual la mejoraremos al final de la clase. Empezaremos por buscar los poliedros convexos cuyas caras sean todas polígonos regulares y tal que la configuración de caras que rodean un vértice sea la misma para todos los vértices. Lo primero será analizar las posibles configuraciones de polígonos alrededor de un vértice. Usaremos la siguiente notación: la terna (a, b, c) es la configuración en un vértice si en el mismo inciden un polígono regular de a lados, uno de b lados y un tercero de c lados, en ese orden cíclico -de izquierda a derecha o a la inversa-; de manera análoga una t-upla da la configuración correspondiente a t polígonos regulares. Es importante tener presente que un ángulo sólido convexo no queda determinado por sus caras, salvo que estas sean tres.

Para familiarizarse con el concepto anterior pueden elegir algunos de los sólidos arquimedianos y escribir la configuración de sus vértices. De gran utilidad, en el sitio `http://bit.ly/1Uh8ePp` se representan todos los poliedros semirregulares y se muestra de forma dinámica cómo se pueden obtener a partir de los sólidos platónicos.

Pasamos a considerar las limitaciones que surgen para las configuraciones, estas restricciones acotarán suficientemente los casos factibles.



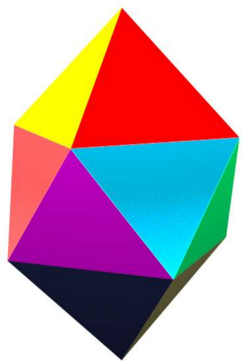


Figura 8. Un antiprisma de base cuadrada y un deltaedro de 16 caras.

Lema 1. *Si todas las caras de un poliedro convexo son polígonos regulares, entonces a lo sumo tres tipos de polígonos pueden aparecer rodeando un vértice.*

Demostración. Se deduce fácilmente teniendo en cuenta que los ángulos que forman un ángulo sólido estrictamente convexo deben sumar menos que dos rectos.

El siguiente lema tiene en su hipótesis la igualdad de configuración en los vértices e infiere fuertes restricciones sobre ellas.

Lema 2. *En un poliedro convexo en el cual los ángulos sólidos tienen la misma configuración, no son posibles las siguientes configuraciones:* (a, b, c) *con* a *impar y* $b \neq c$ *y* $(a, b, c, 3)$ *con* $a \neq c$.

Demostración. Es un ejercicio sencillo.

Basados en los lemas anteriores y haciendo un análisis cuidadoso (no es difícil, es largo) se puede probar el siguiente resultado.

Teorema 3. *Si $\mathcal{P}$ es un poliedro convexo, tal que todas sus caras son polígonos regulares y tal que la configuración de todos sus vértices es la misma, entonces las posibles configuraciones de los vértices de $\mathcal{P}$ son:* $(4, 4, n)$, $(3, 3, 3, n)$ *y otras 13 que se explicitan al hacer la demostración. (La configuración* $(4, 4, n)$ *corresponde a un prisma con base en un polígono de n lados y la configuración* $(3, 3, 3, n)$ *corresponde a un antiprisma.)*

Demostración. Las configuraciones de las que habla el teorema son exactamente aquellas que respetan los lemas anteriores. Es decir se encuentran analizando de forma exhaustiva todos los casos posibles a la luz de los lemas. Veamos a modo de ejemplo el caso en que las caras de nuestro hipotético poliedro son pentágonos y triángulos. De acuerdo al primer lema podemos tener un pentágono y hasta cuatro triángulos o dos pentágonos y hasta dos triángulos. La configuración (3,3,3,3,5) es factible -de hecho la realiza el Dodecaedro Romo-, la configuración (3,3,3,5) es realizada por un antiprisma de base pentagonal, la configuración (3,3,5) queda descartada por el segundo lema, la configuración (3,5,5) y (3,3,5,5) también son invalidadas por el segundo lema, la configuración (3,5,3,5) no es excluída por los lemas y de hecho es realizada por el Icosidodecaedro que está representado en la figura 10.

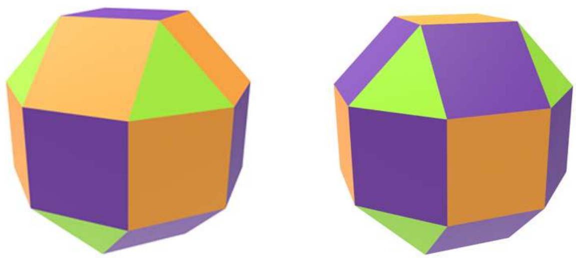


Figura 9. Poliedro de Miller y Rombicubo.

El teorema anterior excluyendo a los prismas y a los antiprismas nos da trece posibles configuraciones, podría ocurrir que algunas configuraciones no se realicen por poliedro alguno y también podría ocurrir que alguna configuración se realizara con poliedros diferentes. Kepler en su trabajo exhibió representaciones gráficas de trece poliedros alcanzando las trece configuraciones. Sin embargo la certeza de la unicidad -a menos de isometrías y homotecias- de la realización de cada configuración surge de un trabajoso teorema de rigidez probado por Cauchy, ese resultado asegura que dado un conjunto de caras con sus relaciones de incidencia, a lo sumo hay un poliedro convexo con esas caras que realiza las relaciones dadas.

Alrededor de 1960 Miller presentó un poliedro (al que a veces se le da su nombre) que parecía que podía calificar como décimocuarto sólido arquimediano -no prismático ni antiprismático-, ese poliedro está representado a la izquierda en la figura 9, es muy similar -pero no congruente- al poliedro que está a su derecha. Ambos poliedros tienen 24 vértices, pero el de Miller tiene menos simetrías -tiene 16 entre directas y no directas-, de manera que aunque todos los vértices de este poliedro tienen la misma configuración no hay forma de llevar un vértice dado en cualquier otro mediante una simetría del poliedro, esa es la explicación moderna de porqué no corresponde darle a este poliedro la categoria de semirregular. Así tenemos una definición satisfactoria de poliedro semirregular: es un poliedro convexo cuyas caras son polígonos regulares y tal que que sus simetrías (directas y no directas) actúan de forma transitiva en sus vértices. Se constata que estos poliedros son exactamente los que enumeró Kepler.

Varios de los poliedros semirregulares se obtienen por truncamiento o rectificación de los poliedros platónicos -es un buen ejercicio obtener algunos de ellos-, sin embargo no todos ellos se obtienen de esa forma, en el sitio de internet ya referido (`http://bit.ly/1Uh8ePp`) se ilustra este hecho de manera muy persuasiva. Analizando la construcción de todos los poliedros semirregulares se concluye que todos ellos son inscriptibles en una esfera.

Ejercicio 2. *¿Es posible distinguir conceptualmente a los prismas y antiprismas de los demás poliedros semirregulares?*

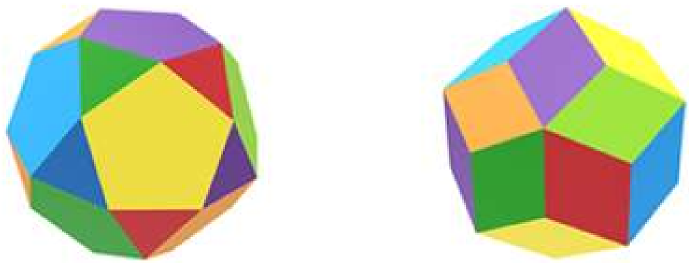


Figura 10. El Icosidodecaedro (semirregular) y su dual (de Catalán).

Ya habíamos visto en la primera clase un procedimento para dualizar a los sólidos platónicos. Ese mismo método se puede aplicar para dualizar a los poliedros semirregulares, ¿porqué? Dualizando los poliedros semirregulares que no son prismas ni antiprismas, se obtiene la familia que se conoce con el nombre de Sólidos de Catalán, uno de ellos aparece en la figura 10. Recomiendo buscar y observar representaciones de todos ellos pensando en qué propiedades remarcables poseen.

4. Tercera clase: Poliedros totalmente transitivos.

El propósito de esta clase es encontrar todos los poliedros (eventualmente compuestos) que son totalmente transitivos respecto a su grupo de simetrías directas.

Para que esto nos lleve más allá de los poliedros platónicos debemos ampliar nuestra noción de poliedro, hasta ahora muy vaga si se trata de poliedros no convexos. Vamos a permitir que los poliedros no sean convexos y que sus caras sean polígonos no necesariamente convexos ni simples, podrían ser estrellas por ejemplo. También permitiremos que las caras se atraviesen, por ejemplo dos estrellas que se unen compartiendo un lado, incluso las caras podrían atravesarse y que su intersección no fuese un lado. La propiedad crucial que sí mantenemos es que cada arista pertenezca exactamente a dos caras. No queremos al inicio de esta clase formular una definición precisa de poliedro, podemos avanzar con eso pendiente, al final presentaremos alguna definición moderna.

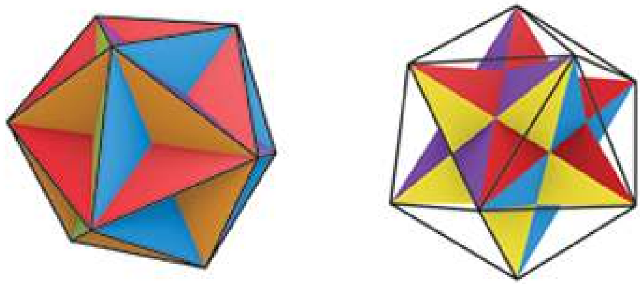


Figura 11. Dos poliedros estrellados con sus envolventes convexas. El gran dodecaedro y el pequeño dodecaedro estrellado.

La envolvente convexa de un subconjunto del espacio es el menor convexo que lo contiene. El núcleo de un poliedro $\mathcal{P}$ está formado por las "partes interiores" de las caras de $\mathcal{P}$, el núcleo de un poliedro convexo es vacío -consideren esta noción sólo a nivel intuitivo-. Antes de continuar con la lectura sugiero observar con atención al pequeño dodecaedro estrellado y al gran dodecaedro, en alguna representación que permita definir y observar totalmente sus caras y sus aristas, la figura 11 puede ser de ayuda, ¿cuáles serían sus caras si prentendemos que todas ellas sean congruentes?, ¿qué podemos decir de sus envolventes convexas?, ¿qué de sus núcleos?

Recordamos que un poliedro totalmente transitivo es uno que es transitivo en los vértices, en las aristas y en las caras. Ser transitivo en los vértices es que dados dos vértices existe una simetría directa del poliedro que lleva un vértice en el otro, análogamente para las aristas y las caras. Para chequear que se ha comprendido esta definición propongo que se responda la siguiente pregunta: ¿qué tipo de transitividad verifican los poliedros arquimedianos?, cabe distinguir dos casos, el de todas las simetrías o el de sólo las simetrías directas.

También nos conviene considerar por un momento la estrella octángula (figura 12), está formada por dos tetraedros regulares congruentes cuyas aristas se cortan perpendicularmente en sus puntos medios, consideramos que sus caras son las caras de los tetraedros, ¿qué clase de transitividad tiene este poliedro compuesto?

Ahora que está más o menos claro el tipo de objetos que buscamos, vamos a iniciar la búsqueda exhaustiva de ellos.

Así que partimos de un poliedro (eventualmente compuesto) $\mathcal{P}$ que es totalmente transitivo. Lo primero que observamos es que los vértices de $\mathcal{P}$ están en la superficie de una esfera, esto es consecuencia del teorema de Klein explicado en la primera clase. Las caras de $\mathcal{P}$ (polígonos asumidos planos) deben ser todas congruentes, esto es por la transitividad en las caras, además las caras son inscriptibles (en cfas.) y dada la transitividad en las aristas, se deduce que las caras son polígonos regulares. Le llamamos $\hat{\mathcal{P}}$ a la envolvente convexa de $\mathcal{P}$, ambos poliedros tienen los mismos vértices, esto es debido a que $\hat{\mathcal{P}}$ es la envolvente convexa de puntos en una esfera, por lo tanto el poliedro $\hat{\mathcal{P}}$ es transitivo en sus vértices, puesto que $\mathcal{P}$ lo es, luego todos los vértices de $\hat{\mathcal{P}}$ tienen la misma valencia (número de vértices adyacentes a un vértice dado), es un ejercicio sencillo (usando el teorema de Euler) verificar que la valencia de los vértices de $\hat{\mathcal{P}}$ es menor o igual a 5.

La estrategia de la búsqueda en la que estamos consiste en determinar los posibles poliedros convexos $\hat{\mathcal{P}}$ donde aparecen las caras de $\mathcal{P}$ como polígonos planos (convexos o no) cuyos vértices son vértices de $\hat{\mathcal{P}}$.

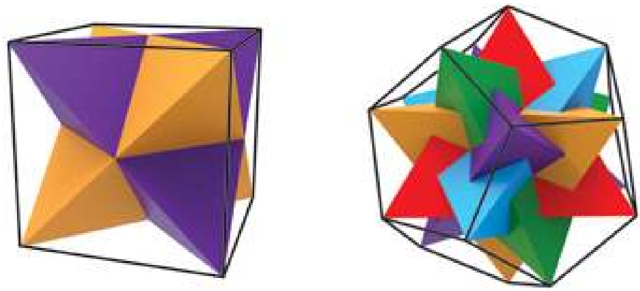


FIGURA 12. Dos poliedros compuestos (por dos y cinco tetraedros) con sus envolventes.

Bien, consideramos ahora la noción de estabilizador de un vértice, arista o cara de $\mathcal{P}$, es el sugbrupo de las simetrías del poliedro que deja invariante al vértice, arista o cara de $\mathcal{P}$ en cuestión. Para entender este concepto busquen determinar el estabilizador de un vértice, arista o cara del dodecaedro regular para su grupo de las simetrías directas.

Ahora vamos a hacer un pequeño cálculo que nos permitirá limitar los posibles $\hat{\mathcal{P}}$. Llamemos N al número de simetrías de $\mathcal{P}$, E a su número de aristas, V a su número de vértices, η al cardinal del estabilizador de una arista de $\mathcal{P}$ (es el mismo para todas las aristas) y ψ al cardinal del estabilizador de un vértice de $\mathcal{P}$ (es el mismo para todos los vértices de $\mathcal{P}$). Las simetrías de $\mathcal{P}$ actúan sobre los vértices, aristas y caras de $\mathcal{P}$ de forma transitiva, en cualquiera de los tres casos tenemos una única órbita y sabemos que en cualquier acción de un grupo finito el cardinal de una órbita es el cociente del orden del grupo por el orden del estabilizador de un punto cualquiera de la órbita. Esto aplicado a los vértices y a las aristas nos da $N = V\psi = E\eta$. Por otro lado si m es la valencia de los vértices de $\mathcal{P}$ resulta que $mV = 2E$. En definitiva $m\eta = 2\psi$ y dado que $m > 2$ resulta que a $\psi \geq 2$, lo cual implica que el estabilizador de los vértices de $\mathcal{P}$ no es trivial, estos estabilizadores deben contener una rotación de orden mayor que 1. Ahora las simetrías de $\mathcal{P}$ son simetrías de $\hat{\mathcal{P}}$. En conclusión los vértices de $\hat{\mathcal{P}}$ están en ejes de rotaciones -simetrías de $\hat{\mathcal{P}}$- de orden 2, 3, 4 o 5.

Claramente tenemos a los sólidos platónicos como posibles $\hat{\mathcal{P}}$, sin embargo rápidamente se descartan el tetraedro y el octaedro por no tener polígonos inscriptos adecuados. ¿Habrá otros posibles $\hat{\mathcal{P}}$?

Una estrategia para encontrar los $\hat{\mathcal{P}}$: tomamos un grupo de los del teorema de Klein y un punto v (a posteriori vértice de $\hat{\mathcal{P}}$) en un eje de rotación (de orden 2, 3, 4 o 5), le aplicamos a v todas las simetrías del grupo, salvo que el grupo sea cíclico la órbita de v está formada exactamente por los vértices de $\hat{\mathcal{P}}$. Veamos un ejemplo, tomamos el grupo del cubo y elegimos v en la mitad de una de las aristas del cubo (por v pasa un eje de rotación de orden 2 del cubo), el $\hat{\mathcal{P}}$ resultante es el cubo-octaedro, el cual no tiene caras inscriptas adecuadas para generar ningún $\mathcal{P}$. Otro ejemplo, ahora tomamos el grupo del dodecaedro y v en la mitad de una

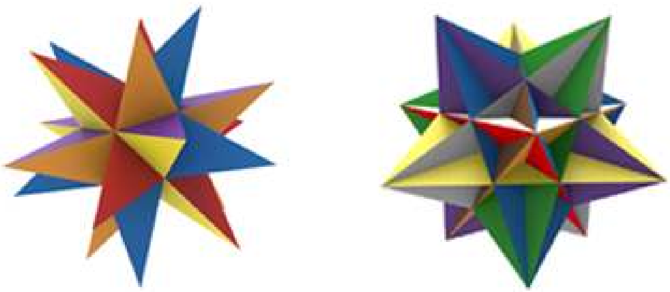


Figura 13. El gran dodecaedro estrellado y el gran icosaedro

de sus aristas, observamos que el $\hat{\mathcal{P}}$ resultante es el icosidodecaedro (figura 10). El icosidodecaedro sí tiene adecuados triángulos equiláteros inscriptos como para conformar un poliedro compuesto por cinco octaedros. Es sencillo verificar que los candidatos $\hat{\mathcal{P}}$ útiles a nuestros efectos son: el cubo, el dodecaedro, el icosaedro y el icosidodecaedro. El cubo da lugar a la estrella octángula (compuesta por dos tetraedros). El dodecaedro da lugar: al gran dodecaedro estrellado, a un poliedro compuesto de cinco cubos, a un poliedro compuesto de cinco tetraedros y a un poliedro compuesto por diez tetraedros. El icosaedro da lugar al pequeño dodecaedro estrellado, al gran dodecaedro y al gran icosaedro. Es decir, son catorce en total los poliedros (eventualmente compuestos) que son totalmente transitivos -incluyendo a los sólidos platónicos-. Todos ellos, salvo los platónicos, están representados en las figuras: 11, 12, 13 y 14.

Figura 14. Poliedros compuestos: cinco octaedros, cinco cubos y diez tetraedros.

Para terminar dos comentarios:

1. A lo largo del siglo pasado se fue dando un proceso de revisión de la noción de poliedro que condujo a que actualmente algunos autores destacados formulen que un poliedro es un grafo que satisface ciertas condiciones específicas. En ese sentido podemos comentar que Grünbaum en 1977 en [3] definió que un poliedro en $\mathbb{R}^3$ es una colección de polígonos (no necesariamente planos ni finitos) que verifican: i. cada arista es arista de exactamente dos caras; ii. dadas dos aristas e y e' existe una cadena de caras $f_1, ..., f_n$ tales que e es arista de f_1, e' es arista de f_n y dos caras sucesivas

cualesquiera comparten una arista; iii. cada conjunto compacto corta sólo un número finito de caras. Un tiempo después en 1988 Farris en [2] propusó agregar una cuarta condición: que las caras que rodean cada vértice estén en ciclo. En 2007 el mismo Grünbaum en [4] formuló una nueva definición abstracta en la que los polígonos son grafos cíclicos finitos, a su vez agregó algunas condiciones más (además de la de Farris) que permiten la dualización de estos poliedros abstractos. Los poliedros compuestos que han aparecido en este trabajo no son poliedros propiamente en el sentido ni siquiera de la primera definición referida, pero ello no los vuelve menos interesantes.

2. Hay una noción de regularidad más estándar que la de transitividad total: un poliedro es regular si sus simetrías (directas e indirectas) actúan de forma transitiva en sus banderas. Una bandera es una terna (v, a, c) donde v es vértice de la arista a y a es arista de la cara c. Observen que ninguno de los poliedros que obtuvimos antes es regular (transitivo en las banderas) si sólo usamos simetrías directas. En el trabajo [3] se da una descripción completa de todos los poliedros regulares, como ya comentamos, permitiendo eventualmente que las caras sean polígonos infinitos no nesariamente planos.

Referencias

[1] P.R. Cromwell, Polyhedra, Cambridge University Press, 1999.

[2] S. L. Farris, Completely classifying all vertex-transitive and edge-transitive polyhedra, Geom. Dedicata 26 (1988) 111-124.

[3] B. Grünbaum, Regular polyhedra–old and new, Aequationes Math. 16 (1977) 1-20.

[4] B. Grünbaum, Graphs of polyhedra; polyhedra as graphs, Discrete Mathematics 307 (2007) 445-463.

CMat, Facultad de Ciencias, Universidad de la República. Montevideo, Uruguay.
Email address: `angelperwyz@gmail.com`