Publicaciones Matemáticas del Uruguay
Volumen 17, Julio 2019, Páginas 153–164
S 0797-1443

AMENABILIDAD, ACCIONES DE GRUPOS, Y EQUIVALENCIA ORBITAL

EUSEBIO GARDELLA

Resumen. Estas notas son una versión expandida de una charla dada en el *Sexto Coloquio Uruguayo de Matemática*, en Diciembre de 2017. El objetivo de las mismas es presentar ciertos resultados, algunos clásicos y otros recientes, referentes a la clasificación de acciones libres y ergódicas de grupos discretos a menos de conjugación y equivalencia orbital.

Dado el rol fundamental que juega la noción de amenabilidad de grupos en la teoría de equivalencia orbital, hemos incluído una breve introducción a este tópico, con particular énfasis en la relación entre amenabilidad y la ausencia de subgrupos libres no conmutativos.

Índice

1. Introducción

La Teoría Ergódica estudia acciones de grupos, generalmente discretos, en espacios de probabilidad, vía automorfismos que preservan la medida. El *problema de clasificación* en Teoría Ergódica procura buscar un método explícito que permita distinguir ciertas clases de acciones, por ejemplo, aquellas que son libres y ergódicas[1]. Este programa fue iniciado por Halmos en la década de los 50's, y desde entonces ha recibido mucha atención. La relación de equivalencia más natural es la de conjugación, mientras que la equivalencia orbital se convirtió en una de las nociones más relevantes en la teoría a partir del trabajo seminal de Dye. La equivalencia orbital también ha encontrado numerosas aplicaciones en las álgebras de operadores, vía la muy estudiada construcción de productos cruzados de Murray y von Neumann.

La equivalencia orbital es muy flexible, ya que entre otras cosas, se aplica a acciones de grupos diferentes, mientras que conjugación sólo tiene sentido para acciones de un mismo grupo. Sorprendentemente, la amenabilidad de grupos tiene

[1]Las transformaciones ergódicas son aquellas que son *irreducibles*, y el Teorema de Descomposición Ergódica afirma que cualquier acción puede escribirse como una integral directa de acciones ergódicas.

un rol central en este contexto: una combinación de resultados de Dye y Ornstein-Weiss muestra que todas las acciones libres y ergódicas de grupos amenables son orbitalmente equivalentes. Los resultados de clasificación a menos de conjugación son menos generales: para acciones de los enteros via shifts de Bernoulli, Ornstein mostró que la entropía es un invariante completo. A pesar de que otros teoremas de clasificación fueron probados en este contexto, el caso general permaneció abierto, hasta que Foreman-Rudolph-Weiss demostraron, de forma rigurosa, que un teorema de clasificación *razonable* para acciones de los enteros no sería posible: la relación de conjugación de transformaciones ergódicas no es Borel. Esto puede interpretarse diciendo que no existe un método o protocolo que involucre una cantidad numerable de información y pasos, que pueda distinguir cuándo dos transformaciones ergódicas son conjugadas.

En décadas recientes, el estudio de la equivalencia orbital se ha concentrado en acciones de grupos no amenables. En ciertos casos, es posible obtener resultados de *rigidez*, que muestran que bajo ciertas hipótesis, equivalencia orbital implica conjugación (y en particular "recuerda" el grupo). En este contexto, la teoría de superrigidez, desarrollada por Zimmer, ha jugado un rol primordial. En los últimos años, la infusión de técnicas provenientes del álgebra de operadores, como la teoría de deformación-rigidez de Popa, le ha dado mayor ímpetu al área.

En estas notas, hacemos un recuento sobre nuestro trabajo reciente en colaboración con Martino Lupini [13], donde hacemos nuevas contribuciones al problema de clasificación, tanto para conjugación como para equivalencia orbital, en el caso no amenable. Nuestros resultados implican una solución completa en el caso de equivalencia orbital, que puede formularse en la siguiente dicotomía: la equivalencia orbital es Borel si y sólo si el grupo es amenable, en cuyo caso existe una única clase de equivalencia. Nuestras técnicas provienen del álgebra de operadores y son esencialmente analíticas, demostrando la rica interacción existente entre las C*-álgebras y álgebras de von Neumann, por un lado, y la Teoría Ergódica, por el otro.

Hemos organizado estas notas de la siguiente manera: en la Sección 2 damos una breve introducción a la amenabilidad para grupos discretos, con especial énfasis en la no amenabilidad del grupo libre $\mathbb{F}_2$ y de los grupos que lo contienen. En la Sección 3 introducimos el problema de clasificación en Teoría Ergódica, y damos un recuento de los resultados más relevantes, incluyendo los aportes de [13]. Finalmente, la Sección 4 contiene un esbozo de la prueba de nuestro teorema principal, así como algunas reflexiones finales.

Agradecimientos: Quisiéramos agradecer al comité organizador del Coloquio, y en particular a Martín Rieris, por darnos la oportunidad de presentar nuestro trabajo. También agradecemos a Fernando Abadie y Marina Gardella por haber leído rigurosamente el manuscrito, y por todas sus correcciones y comentarios.

2. La paradoja de Banach-Tarski y amenabilidad

En esta sección introducimos el concepto de amenabilidad para grupos. El libro de Paterson [22] es una excelente referencia donde el lector podrá encontrar mucho más de lo que presentamos aquí. Comenzamos con una motivación usando el siguiente teorema, que es popularmente conocido como la *paradoja de Banach-Tarski*:

Teorema 2.1 (Banach-Tarski, 1924)**.** *Existe una partición finita de la bola* $\mathbb{D}^3 \subseteq \mathbb{R}^3$*, tal que los conjuntos de esta partición pueden rotarse y trasladarse de modo que el resultado de estos movimientos es la unión disjunta de dos copias de* $\mathbb{D}^3$*.*

Este teorema es paradojal porque desafía la intuición: ¿cómo es posible duplicar el volumen? La respuesta es que estos conjuntos no pueden "medirse" con una medida que sea invariante por congruencias y de acuerdo a la cual la bola tenga volumen total 1. Esto motiva la siguiente definición:

Definición 2.2 (von Neumann, 1930)**.** *Un grupo discreto* Γ *es* amenable *si admite una medida de probabilidad finitamente aditiva, definida en todos los subconjuntos de* Γ*, que es invariante por la acción (izquierda) de* Γ*.*

La medida en la definición anterior no es una medida en el sentido clásico de Teoría de la Medida, pues no se asume que sea aditiva con respecto a uniones numerables. (En Inglés, se la denomina "mean"). La medida de Haar satisface las condiciones en la definición excepto que no tiene masa total 1, a menos que el grupo sea finito.

La noción de amenabilidad admite una cantidad sorprendente de formulaciones equivalentes, de naturalezas muy variadas: algunas son puramente algebraicas, algunas puramente analíticas, otras se refieren puramente a la teoría de representaciones del grupo, etc. A continuación recordamos tan sólo dos de ellas.

Recordemos que el símbolo $\triangle$ denota la diferencia simétrica de conjuntos, es decir, $E \triangle F = (E \cup F) \cap (E \cap F)^c$.

Definición 2.3. *Sea* Γ *un grupo discreto numerable. Una* sucesión de Følner *para* Γ *es una sucesión* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de subconjuntos finitos de* Γ *que satisfacen*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\gamma F_n \triangle F_n|}{|F_n|} = 0$$

para todo $\gamma \in \Gamma$*.*

Definición 2.4. *Sea* Γ *un grupo discreto numerable. Decimos que* Γ *admite una* descomposición paradójica *si existen subconjuntos disjuntos* $A, B \subseteq \Gamma$*, particiones finitas*

$$A = \bigcup_{j=1}^{n} A_j \quad y \quad B = \bigcup_{j=1}^{n} B_j$$

y elementos $\gamma_1^A, \dots, \gamma_n^A, \gamma_1^B, \dots, \gamma_n^B \in \Gamma$ *tales que* $\{\gamma_j^A A_j\}_{j=1}^n$ *y* $\{\gamma_j^B B_j\}_{j=1}^n$ *son particiones de* Γ*.*

Teorema 2.5. *Sea* Γ *un grupo discreto numerable. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) Γ *es amenable.*
(2) Γ *admite una sucesión de Følner.*
(3) Γ *no admite una descomposición paradójica.*

La única dirección que es sencilla es (1) $\Rightarrow$ (3), que dejamos como ejercicio para el lector.

Las sucesiones de Følner son una herramienta muy importante, que permiten tomar promedios aproximados en grupos amenables. Por esta razón, los grupos amemables también son llamados *promediables.*

La proposición que sigue nos permite construir muchos ejemplos de grupos amenables. Por ejemplo, deducimos de (2) y (4) que cualquier grupo nilpotente es amenable.

Proposición 2.6. *Sea Γ un grupo discreto.*

(1) Si Γ es finito, entonces es amenable.
(2) Si Γ es abeliano, entonces es amenable.
(3) Si Γ es amenable, entonces cualquier subgrupo y cualquier cociente de Γ es también amenable.
(4) Si Λ es un subgrupo normal y amenable de Γ y Γ/Λ es amenable, entonces Γ es amenable.

El ejemplo prototípico de un grupo no amenable es el grupo libre en dos generadores, $\mathbb{F}_2$[2]. En vista de la parte (3) de la proposición anterior, cualquier grupo que contiene a $\mathbb{F}_2$ tampoco es amenable.

Volviendo a la paradoja de Banach-Tarski, una forma de probarla consiste en seguir los siguientes pasos. Primero, probar que $\mathbb{F}_2$ es un subgrupo del grupo de isometrías de $\mathbb{R}^3$, y luego, usar una descomposición paradójica de $\mathbb{F}_2$ para encontrar una partición de $\mathbb{D}^3$ como en el enunciado del Teorema 2.1.

El hecho de que la paradoja de Banach-Tarski sólo usa la existencia de $\mathbb{F}_2$ como subgrupo, condujo a von Neumann a pensar que la existencia de subgrupos libres podría ser la única obstrucción a la amenabilidad. Más concretamente:

Pregunta 2.7. *Sea Γ un grupo discreto. ¿Es cierto que Γ es amenable si y sólo si no contiene un subgrupo isomorfo a $\mathbb{F}_2$?*

El hecho que esta pregunta tenga una respuesta afirmativa fue conocido como la *conjetura de von Neumann*, y permaneció abierta por más de cuatro décadas, hasta que Olshanski'i encontró en [20] un ejemplo de un grupo no amenable cuyos subgrupos propios son todos finitos. A pesar de que esta conjetura resultó ser falsa en su formulación original, se ha probado recientemente que todo grupo no amenable contiene $\mathbb{F}_2$ "a nivel dinámico". Volveremos sobre esto hacia el final de estas notas.

3. Clasificación de acciones libres y ergódicas

Por el resto de este documento, fijamos un grupo discreto, infinito y numerable Γ, y un espacio de probabilidad estándar[3] sin átomos (X, μ). (Para fijar ideas, podemos tomar el intervalo $[0, 1]$ con la medida de Lebesgue). Denotamos por $\mathrm{Aut}(X, \mu)$ el grupo de biyecciones medibles de X, cuyas inversas también son medibles, y que preservan la medida μ.

Nuestro objeto de estudio son las acciones de Γ en (X, μ) por automorfismos, es decir, los homomorfismos de grupos $\Gamma \to \mathrm{Aut}(X, \mu)$, que abreviamos a $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$.

Definición 3.1. *Una acción $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ se llama:*

(1) libre*, si $\mu(\{x \in X : \gamma \cdot x = x\}) = 0$ para todo $\gamma \in \Gamma \setminus \{1\}$.*

[2] Denotemos los generadores de $\mathbb{F}_2$ por a y b, y sea $S(a)$ el subconjunto de $\mathbb{F}_2$ de las palabras que comienzan con a; lo mismo para $S(a^{-1})$, $S(b)$ y $S(b^{-1})$. Entonces una descomposición paradójica de $\mathbb{F}_2$ se obtiene tomando $A = S(a) \cup S(a^{-1})$ con $\gamma_1^A = 1$ y $\gamma_2^A = a$, y $B = S(b) \cup S(b^{-1})$ con $\gamma_1^B = 1$ y $\gamma_2^B = b$.

[3] Esto es, una medida de probabilidad en la σ-álgebra de Borel de un espacio métrico completo y separable. Dicha σ-álgebra es independiente del espacio escogido. A menos de isomorfismo, existe una única medida de probabilidad sin átomos definida en dicha σ-álgebra.

(2) ergódica*, si cuando $E \subseteq X$ es Γ-invariante y medible, entonces $\mu(E)$ es o bien 0 o 1.*

Observación 3.2. *Si Γ es infinito y actúa libremente en un espacio de probabilidad, entonces dicho espacio no puede tener átomos, pues la órbita de cualquier átomo sería infinita (por ser la acción libre) y por lo tanto tendría medida infinita, lo cual es absurdo. Por lo tanto, no hay pérdida de generalidad al restringirnos a espacios sin átomos.*

El tema central de estas notas es la clasificación de acciones libres y ergódicas a menos de las relaciones de equivalencia definidas a continuación:

Definición 3.3. *Sean $\theta, \kappa\colon \Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ acciones. Decimos que*

(1) *θ es* conjugada *a κ, escrito $\theta \cong \kappa$, si existe $f \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$ tal que $f \circ \theta_\gamma = \kappa_\gamma \circ f$ en μ-casi todo punto $x \in X$, para todo $\gamma \in \Gamma$.*

(2) *θ es* orbitalmente equivalente *a κ, escrito $\theta \sim_{\mathrm{OE}} \kappa$, si existe $f \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$ tal que $f(\theta(\Gamma)\cdot x) = \kappa(\Gamma)\cdot f(x)$ para μ-casi todo $x \in X$.*

Si bien la conjugación es la relación de equivalencia más natural, es también muy rígida. Por ejemplo, una acción libre y ergódica genérica (es decir, elegida al *azar*) no es conjugada a su inversa[4]. Sin embargo, cualquier acción es siempre orbitalmente equivalente a su inversa. De hecho, la equivalencia orbital admite una descripción muy satisfactoria en términos de álgebras de operadores:

Teorema 3.4 (Singer [23], 1977)**.** *Sean $\theta, \kappa\colon \Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ acciones*[5]*. Entonces $\theta \sim_{\mathrm{OE}} \kappa$ si y sólo si existe un isomorfismo $\psi\colon L^\infty(X,\mu) \rtimes_\theta \Gamma \to L^\infty(X,\mu) \rtimes_\kappa \Gamma$ de los productos cruzados que satisface $\psi(L^\infty(X,\mu)) = L^\infty(X,\mu)$.*

Las siguientes preguntas de Halmos, planteadas en sus famosas notas en Teoría Ergódica, motivan nuestro trabajo:

Pregunta 3.5 (Halmos [15], 1956)**.** *¿Existe un* método *que determine si dos acciones (libres y ergódicas) $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ son conjugadas? ¿Y orbitalmente equivalentes?*

Idealmente, una respuesta afirmativa vendría acompañada de una “receta", como podría ser el cálculo de algún invariante. El mismo Halmos admitió en sus notas que sus preguntas son vagas, y una interpretación formal se puede encontrar en el contexto de la teoría de complejidad de Borel:

Pregunta 3.6 (Kechris [19], 2006)**.** *Sea Γ un grupo discreto numerable. ¿Son Borel las relaciones de conjugación y equivalencia orbital de acciones (libres, ergódicas) de Γ?*

Tenemos que especificar el significado de la palabra “Borel.$^{\text{en}}$ la pregunta anterior. Supongamos que E es un espacio métrico completo y separable con una noción de equivalencia $\sim$ en él. Identificamos $\sim$ con un subconjunto de $E \times E$ a través de su grafo:

$$\mathrm{gr}(\sim) = \{(e,f) \in E \times E \colon e \sim f\}.$$

Decimos que $\sim$ es Borel si $\mathrm{gr}(\sim)$ es un subconjunto de Borel de $E \times E$ (con la σ-álgebra producto). La relación es Borel precisamente si existe un procedimiento uniforme y explícito que, dados dos elementos e y f de E, corre por una cantidad

[4]Más precisamente, la probabilidad de que sea conjugada a su inversa es cero.

[5]De hecho, en este teorema uno puede asumir que θ y κ son acciones de grupos distintos.

numerable de pasos, en cada uno de los cuales verifica si el par (e, f) pertenece a ciertos abiertos de $E \times E$, y al final decide si e y f son equivalentes.

Esta discusión se puede adaptar al contexto de acciones de Γ de la siguiente forma. Primero, observamos que el espacio $\mathrm{Aut}(X, \mu)$ de automorfismos de (X, μ) es un espacio métrico completo con la topología débil (convergencia en medida). El espacio producto $\mathrm{Aut}(X, \mu)^\Gamma$ también es métrico completo, y el espacio $\mathrm{Act}_\Gamma(X, \mu)$ de acciones de Γ en (X, μ) es cerrado en él[6], por lo que también es completo. El mismo razonamiento se aplica al subespacio de las acciones que son libres y ergódicas, puesto que éste es también un subespacio cerrado en $\mathrm{Act}_\Gamma(X, \mu)$.

A continuación, hacemos un resumen de lo que se conoce en relación a las Pregunta 3.5 y Pregunta 3.6. Nuestro recuento no es cronológico, sino lógico.

Uno espera que la relación de conjugación sea bastante más complicada que la de equivalencia orbital. En efecto, esta relación ya es complicada para los enteros:

Teorema 3.7 (Foreman-Rudolph-Weiss [8], 2010)**.** *La relación de conjugación de automorfismos libres y ergódicos no es Borel.*

A pesar de que el teorema anterior sugiere que la relación de conjugación no es Borel para ningún grupo, esto no había sido confirmado, hasta ahora, en ningún otro caso.

Mucho más se sabe con respecto a equivalencia orbital. Una combinación de resultados clásicos de Dye y Ornstein-Weiss da una respuesta completa en el caso amenable:

Teorema 3.8 (Dye y Ornstein-Weiss [6, 21], 1963 y 1982)**.** *Dos acciones libres y ergódicas cualesquiera de $\mathbb{Z}$ son orbitalmente equivalentes. Más generalmente, dos acciones libres y ergódicas cualesquiera de un grupo amenable son orbitalmente equivalentes*[7].

También existen "modelos" explícitos: los shifts de Bernoulli

$$\beta \colon \Gamma \curvearrowright [0,1]^\Gamma = \{f \colon \Gamma \to [0,1]\},$$

dados por $\beta_\gamma(f)(\delta) = f(\gamma^{-1}\delta)$ para todos $\gamma, \delta \in \Gamma$ y $f \colon \Gamma \to [0,1]$.

Deducimos del Teorema 3.8 que la versión referente a equivalencia orbital en la Pregunta 3.5 tiene una respuesta muy sencilla cuando Γ es amenable: dos acciones de Γ son *siempre* orbitalmente equivalentes. Por lo tanto, la pregunta es sólo interesante en el caso no amenable. En este contexto, lo único que era conocido eran resultados referentes a la *cardinalidad* de las clases de equivalencia orbital:

- Connes-Weiss [4], 1980: si Γ no tiene la propiedad (T) de Kazhdan[8], entonces admite al menos dos acciones libres y ergódicas que no son orbitalmente equivalentes.
- Hjorth [16], 2005: si Γ tiene la propiedad (T), entonces admite una cantidad no numerable de acciones libres y ergódicas que no son orbitalmente equivalentes.

(De estos resultados, junto con el Teorema 3.8, deducimos que Γ es amenable *si y sólo si* dos acciones libres y ergódicas cualesquiera de Γ son orbitalmente equivalentes. Nuestro Corolario 3.10 es la versión definitiva de esta observación).

[6]Esto es fácil de ver: las condiciones que una función $\Gamma \to \mathrm{Aut}(X, \mu)$ debe cumplir para ser un homomorfismo de grupos, son cerradas en la topología de la convergencia puntual.

[7]De hecho, el resultado es incluso más general: dos acciones libres y ergódicas cualesquiera de dos grupos amenables (potencialmente distintos) son siempre orbitalmente equivalentes.

[8]Ver, por ejemplo, la Definición 4.3 y los comentarios que le suceden.

- Gaboriau-Popa [10], 2005: los grupos libres $\mathbb{F}_n$, para $1 < n < \infty$, admiten una cantidad no numerable de acciones libres y ergódicas que no son orbitalmente equivalentes.
- Ioana [18], 2007: si Γ contiene $\mathbb{F}_2$, entonces admite una cantidad no numerable de acciones libres y ergódicas que no son orbitalmente equivalentes..
- Epstein [7], 2007: cualquier grupo no amenable admite una cantidad no numerable de acciones libres y ergódicas que no son orbitalmente equivalentes.

Como conjugación es una relación más fuerte que equivalencia orbital, los resultados anteriores también muestran que cualquier grupo no amenable admite una cantidad no numerable de acciones libres y ergódicas que no son conjugadas. Por supuesto, el hecho de que exista una cantidad no numerable de clases de equivalencia no implica que dicha relación no sea Borel. Tampoco alcanza con saber que la relación de equivalencia orbital no es Borel para concluir que la relación de conjugación tampoco lo es, ya que no ser medible no es una propiedad heredada por subconjuntos arbitrarios.

En colaboración con Martino Lupini [13] (véase también [12]), hemos respondido las preguntas de Halmos (en la reformulación de Kechris dada en la Pregunta 3.6) para grupos no amenables, tanto para la relación de conjugación como la de equivalencia orbital:

Teorema 3.9 (G.-Lupini [13], 2017). *Si Γ no es amenable, entonces las relaciones de equivalencia orbital y conjugación de acciones libres y ergódicas de Γ no son Borel.*

Junto con el Teorema 3.8, nuestro teorema implica la siguiente dicotomía:

Corolario 3.10. *Sea Γ un grupo infinito numerable.*

(1) Si Γ es amenable, entonces dos acciones libres y ergódicas cualesquiera de Γ son orbitalmente equivalentes.

(2) Si Γ no es amenable, entonces la equivalencia orbital de acciones libres y ergódicas de Γ no es Borel.

Una aplicación concreta del Teorema 3.9, para quienes no estén necesariamente interesados en complejidad de Borel, es para descartar la validez de ciertos teoremas de clasificación hipotéticos. Por ejemplo, consideremos el siguiente resultado:

Teorema 3.11 (Bowen [1], 2010). *Los shifts de Bernoulli de grupos libres se clasifican por su entropía.*

Uno podría, un poco inocentemente, pensar que tal vez la entropía clasifica no sólo los shifts de Bernoulli, sino todas las acciones libres y ergódicas. Pero el Teorema 3.9 implica que esto no puede suceder, ya que la entropía es un invariante que se computa de forma Borel, y la igualdad de números reales es una relación de Borel.

4. Esbozo de la prueba del Teorema 3.9

A pesar de lo que su enunciado parecería indicar, la prueba del Teorema 3.9 usa únicamente técnicas que provienen del álgebra de operadores, más precisamente de las álgebras de von Neumann. En esta última sección, describimos las principales ideas usadas en dicha prueba. Para ello, necesitamos algunas definiciones y resultados preliminares. Seguimos fijando un espacio de probabilidad estándar sin átomos

(X,μ) y un grupo infinito numerable Γ. Denotamos por $\mathcal{U}(L^\infty(X,\mu))$ al grupo de las funciones medibles $X \to S^1$, identificadas cuando coinciden en μ-casi todo punto. Observar que $\mathcal{U}(L^\infty(X,\mu))$ es precisamente el grupo de los unitarios del álgebra de von Neumann $L^\infty(X,\mu)$.

Definición 4.1. *Sea $\Gamma \curvearrowright^\theta (X,\mu)$ una acción, y sean $\Delta \leq \Lambda \leq \Gamma$ subgrupos.*

(1) *Un θ-*cociclo *es una función $u\colon \Gamma \to \mathcal{U}(L^\infty(X,\mu))$ que satisface $u_{\gamma\rho} = u_\gamma \theta_\gamma(u_\rho)$ para todo $\gamma,\rho \in \Gamma$.*
(2) *Un θ-cociclo u se llama Δ-*invariante *si $u_\delta = 1$ y $\theta_\delta(u_\gamma) = u_\gamma$ para todo $\delta \in \Delta$ y todo $\gamma \in \Gamma$.*
(3) *Un θ-cociclo u es un* coborde débil Λ-relativo *si existen un unitario $v \in \mathcal{U}(L^\infty(X,\mu))$ y escalares $z_\lambda \in S^1$, para $\lambda \in \Lambda$, que satisfacen*
$$u_\lambda(x) = z_\lambda v(x)\overline{v(\theta_{\lambda^{-1}}(x))}$$
para μ-casi todo $x \in X$ y para todo $\lambda \in \Lambda$.

Observemos que el grupo de los θ-cociclos Δ-invariantes tiene una estructura natural de grupo abeliano, con la operación dada por multiplicación puntual. Con dicha estructura, el conjunto de los cobordes débiles Λ-relativos es un subgrupo normal, aunque no necesariamente cerrado.

(4) *El grupo de* 1-cohomología débil, Δ-invariante, y Λ-relativa *de θ es el cociente $H^1_{:\Delta,\Lambda,w}(\theta)$ de los θ-cociclos Δ-invariantes por los cobordes débiles Λ-relativos.*

El grupo $H^1_{:\Delta,\Lambda,w}(\theta)$ es un invariante de conjugación, pero no de equivalencia orbital.

Observación 4.2. *Cuando $\Delta = \{e\}$ y $\Lambda = \Gamma$, recuperamos la definición usual de 1-cohomología. Cuando Δ es un subgrupo normal de $\Lambda = \Gamma$, entonces $H^1_{:\Delta,\Lambda,w}(\theta)$ es la cohomología de la acción cociente.*

Sea $\pi\colon \Gamma \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ una representación unitaria de Γ en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Dado un subgrupo $\Omega \subseteq \Gamma$, un vector $\xi \in \mathcal{H}$ se dice Ω-*invariante* si $\pi_\omega(\xi) = \xi$ para todo $\omega \in \Omega$. Decimos que π tiene *vectores unitarios casi invariantes* si existe una sucesión $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vectores unitarios en $\mathcal{H}$ que satisfacen $\lim\limits_{n\to\infty} \|\pi_\gamma(\xi_n) - \xi_n\| = 0$ para todo $\gamma \in \Gamma$.

Definición 4.3. *Decimos que una terna $\Delta \leq \Lambda \leq \Gamma$ tiene la* propiedad (T) *si cualquier representación unitaria de Γ que tiene vectores unitarios Δ-invariantes que son casi invariantes por Γ, tiene vectores unitarios que son Λ-invariantes.*

Por ejemplo, $\{1\} \leq \Gamma \leq \Gamma$ tiene la propiedad (T) si y sólo si Γ tiene la propiedad (T) en el sentido de Kazhdan. Cuando $\Delta = \{1\}$, obtenemos la propiedad (T) relativa estudiada por Margulis. Por último, si Δ es un subgrupo normal de Λ y Λ/Δ tiene la propiedad (T), entonces $\Delta \leq \Lambda \leq \Gamma$ tiene la propiedad (T).

Adaptando métodos muy sofisticados de Popa, probamos un teorema de *superrigidez* para acciones maleables de grupos con la propiedad (T) para ternas. En el contexto de la prueba del Teorema 3.9, usaremos dicho teorema de superrigidez en la siguiente forma:

Teorema 4.4 (G.-Lupini [13], 2017)**.** *Sea $\Delta \leq \Lambda \leq \Gamma$ una terna con la propiedad (T), y supongamos que Δ tiene índice infinito en Γ. Sea $\beta\colon \Gamma \curvearrowright L^\infty(X,\mu)^{\otimes\Gamma/\Delta} \otimes L^\infty(X,\mu)^{\otimes\Gamma}$ el shift canónico. Entonces*
$$H^1_{:\Delta,\Lambda,w}(\beta) = \{1\}.$$

A continuación, describimos la prueba del Teorema 3.9.

Primer paso: Supongamos que Γ contiene $\mathbb{F}_2$. Comenzamos por fijar una inclusión $\mathbb{F}_2 \leq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, que corresponde a una acción $\mathbb{F}_2 \curvearrowright \mathbb{Z}^2$ por automorfismos de grupos. Usando dualidad, obtenemos una acción de $\mathbb{F}_2$ en $\mathbb{T}^2 = \widehat{\mathbb{Z}^2}$, la cual denotamos por $\rho\colon \mathbb{F}_2 \curvearrowright \mathbb{T}^2$.

Notación 4.5. *Podemos (co)inducir ρ a una acción $\Gamma \curvearrowright (Y,\nu)$ de la siguiente manera. Definimos*

$$Y = \{f\colon \Gamma \to \mathbb{T}^2 \colon f(\gamma a) = \rho_{a^{-1}}(f(\gamma)) \text{ para todos } \gamma \in \Gamma, a \in \mathbb{F}_2\} \subseteq (\mathbb{T}^2)^\Gamma,$$

munido con la restricción ν de la medida producto. Entonces (Y,ν) es el espacio de probabilidad estándar sin átomos, y definimos $\widehat{\rho}\colon \Gamma \curvearrowright (Y,\nu)$ por $\widehat{\rho}_{\gamma_0}(f)(\gamma_1) = f(\gamma_0^{-1}\gamma_1)$ para todos $\gamma_0, \gamma_1 \in \Gamma$.

Probaremos lo siguiente:

Teorema 4.6. *Existe una asignación de Borel $A \mapsto \theta_A$ de grupos abelianos infinitos numerables sin torsión a acciones libres y ergódicas $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ que satisface:*

(1) $A \cong A'$ si y sólo si $\theta_A \cong \theta_{A'}$, y
(2) si $\mathcal{A}$ es una colección de grupos abelianos infinitos numerables sin torsión tales que $\{\theta_A \colon A \in \mathcal{A}\}$ son todas orbitalmente equivalentes y dos a dos no conjugadas, entonces $\mathcal{A}$ es numerable.

El teorema anterior implica que existe una función de Borel, de la relación de isomorfismo de grupos abelianos sin torsión, a la relación de equivalencia orbital de acciones libres y ergódicas de Γ, que identifica a lo sumo una cantidad numerable de grupos no-isomorfos. Usando que la relación de isomorfismo de dichos grupos no es Borel [17, 5], se puede probar que la relación de equivalencia orbital de las acciones de Γ tampoco es de Borel.

Prueba del Teorema 4.6. Fijamos un subgrupo normal Δ de $\mathbb{F}_2$ tal que $\mathbb{F}_2/\Delta$ tiene la propiedad (T), de modo que la terna $\Delta \leq \mathbb{F}_2 \leq \Gamma$ tiene la propiedad (T). Sea A un grupo abeliano infinito numerable sin torsión, y sea (G, h_G) su grupo dual munido con la medida de Haar. Observemos que (G, h_G) es el espacio de probabilidad estándar sin átomos. Sea $M = L^\infty(G, h_G)$, y denotemos por $\mathtt{Lt}\colon G \to \mathrm{Aut}(M)$ la acción inducida por la traslación por izquierda de G en sí mismo. Consideramos las siguientes acciones:

$$\Gamma \curvearrowright^\beta M^{\otimes \Gamma/\Delta} \otimes M^{\otimes\Gamma} \curvearrowleft^\alpha G,$$

donde β es el producto tensorial del shift de Bernoulli, y α es el producto tensorial de $\mathtt{Lt}^{\otimes\Gamma/\Lambda}$ y $\mathrm{id}_{M^{\otimes\Gamma}}$.

Sea M_A el álgebra de puntos fijos de α. Como α y β conmutan, deducimos que β induce una acción $\beta_A\colon \Gamma \curvearrowright M_A$.

Definimos $\theta_A = \beta_A \otimes \widehat{\rho}$, que es una acción de Γ en el espacio de probabilidad estándar sin átomos. Es libre porque tiene la acción libre β_A como factor. Usando que Γ/Δ es infinito, y propiedades de $\widehat{\rho}$, uno puede mostrar que θ_A es ergódica.

Afirmación: *hay un isomorfismo de grupos $H^1_{:\Delta,\mathbb{F}_2,w}(\theta_A|_{\mathbb{F}_2}) \cong A$.* Sea u un cociclo Δ-invariante para $\theta_A|_{\mathbb{F}_2}$. Entonces u es también un cociclo Δ-invariante para $\beta|_{\mathbb{F}_2} \otimes \widehat{\rho}|_{\mathbb{F}_2}$. Además, como $\widehat{\rho}|_{\mathbb{F}_2}$ es esencialmente una amplificación de ρ, el Teorema 4.4 se aplica a ella. Deducimos entonces que u es un coborde para $\beta|_{\mathbb{F}_2} \otimes \widehat{\rho}|_{\mathbb{F}_2}$, por lo que existe un unitario $v \in \mathcal{U}(M^{\otimes\Gamma/\Delta})$ que implementa la trivialidad. Usando ergodicidad, uno muestra que existe un carácter $\chi_u \in \widehat{G} \cong A$ que satisface

$$\alpha_g(z) = \chi_u(g)z$$

para todo $g \in G$. El resto de la prueba de la afirmación consiste en mostrar que la asignación $[u] \mapsto \chi_u$ es un isomorfismo de grupos.

Deducimos entonces que si A y A' son grupos abelianos infinitos sin torsión, entonces $\theta_A \cong \theta_{A'}$ si y sólo si $A \cong A'$. Esto prueba la parte (1) del Teorema 4.6, y también muestra que la relación de conjugación de acciones libres y ergódicas de Γ no es Borel.

La segunda parte del teorema es considerablemente más técnica, y hace uso esencial de las propiedades de rigidez de ρ. Por razones de espacio, omitimos su prueba. $\square$

La noción de propiedad (T) para una terna de grupos es nueva, y es probablemente la técnica más innovadora de nuestro trabajo. Su uso nos permite tener acceso a resultados de superrigidez (como en el Teorema 4.4) para acciones de grupos libres, mientras que los resultados anteriores acerca de rigidez no se aplican a ellos. Tal vez por esta razón, las pruebas de los resultados en [10, 18, 7] sólo producen una cantidad no numerable de acciones.

Hemos esbozado la prueba del Teorema 4.6 (y por lo tanto del Teorema 3.9) en el caso en que Γ contiene a $\mathbb{F}_2$. En vista de los ejemplos encontrados en [20], esto no es suficiente, así que procedemos a considerar el caso general.

Segundo paso: Γ es un grupo no amenable arbitrario. Como discutimos en la primer sección, la conjetura de von Neumann (Pregunta 2.7) es falsa, y existen grupos no amenables que no contienen a $\mathbb{F}_2$. Sorprendentemente, Gaboriau y Lyons demostraron en [9] que dicha conjetura tiene una respuesta afirmativa en el contexto "dinámico-medible":

Teorema 4.7 (Gaboriau-Lyons [9], 2009)**.** *Si $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)^\Gamma$ es el shift de Bernoulli de un grupo no amenable Γ, entonces existe una acción libre y ergódica $\mathbb{F}_2 \curvearrowright (X,\mu)^\Gamma$ tal que $\mathbb{F}_2 \cdot x \subseteq \Gamma \cdot x$ para casi todo $x \in X^\Gamma$.*

El resultado anterior nos da una inclusión de las relaciones de equivalencia orbital, concebidas como subconjuntos del espacio producto. El ámbito apropiado para utilizar esto es el de los grupoides étales: en este contexto, desarollamos una noción de propiedad (T) para ternas de grupoides y probamos un resultado de superrigidez análogo al Teorema 4.4. El proceso de coinducción se efectúa al nivel de las relaciones de equivalencia, interpretadas como grupoides. Esta estrategia requiere una cantidad importante de trabajo adicional, el cual omitimos aquí.

El contexto abstracto en el que trabajamos nos permite probar resultados mucho más generales, que en particular se aplican a acciones de grupos que no son necesariamente discretos:

Teorema 4.8. *Sea G un grupo localmente compacto, unimodular y no amenable. Entonces las relaciones de conjugación y equivalencia orbital de acciones libres y ergódicas de G no son Borel.*

Para equivalencia orbital, el caso de grupos amenables tiene el mismo resultado que el caso discreto, y esto fue probado por Connes-Feldman-Weiss en [3]. Usando un resultado reciente de Bowen-Hoff-Ioana en [2], nuestra prueba del Teorema 4.8

consiste esencialmente en reducirnos al caso de un grupo discreto que contiene a $\mathbb{F}_2$. En otras palabras, obtenemos el resultado en el caso de grupos localmente compactos "casi" como un corolario del resultado para grupos discretos.

Quedan muchas preguntas interesantes por responder. Por ejemplo:

Pregunta 4.9. *¿Es Borel la relación de conjugación de acciones libres y ergódicas de un grupo discreto infinito?*

Para $\mathbb{Z}$ y para grupos no amenables, la respuesta es *no*, pero la pregunta está abierta para todos los demás grupos, y se espera que la respuesta sea también *no* en general.

Los resultados descritos en estas notas se refieren a acciones por automorfismos de espacios de probabilidad. Sería interesante explorar versiones topológicas de algunos de ellos, por ejemplo del Teorema 3.8. No está claro cuál es la relación de equivalencia apropiada (¿equivalencia orbital continua?), ni tampoco el espacio topológico que deba reemplazar al espacio de probabilidad estándar (¿el espacio de Cantor?). El trabajo de Giordano-Putnam-Skau [14] sobre homeomorfismos minimales de espacios de Cantor puede ofrecer pistas al respecto.

Nuestra motivación original para probar el Teorema 3.9 proviene del álgebra de operadores, más precisamente de las C^*-álgebras. En este contexto, parece existir un resultado análogo al Corolario 3.10, explícitamente enunciado en la Conjetura A en [11], que reproducimos a continuación (las definiciones relevantes pueden encontrarse en [11]):

Conjetura 4.10 (G.-Lupini [11], 2016)**.** *Sea Γ un grupo discreto numerable sin torsión, y sea $\mathcal{D}$ una C^*-álgebra fuertemente autoabsorbente.*

(1) Si Γ es amenable, entonces dos acciones fuertemente externas de Γ en $\mathcal{D}$ son cociclo-equivalentes.

(2) Si Γ no es amenable, entonces la relación de cociclo-equivalencia de acciones fuertemente externas de Γ en $\mathcal{D}$ no es Borel.

El trabajo [13] comenzó como un intento de mejorar nuestro entendimiento de los resultados en el caso conmutativo, para luego poder hacer avances en dicha conjetura. Una solución satisfactoria al siguiente problema será instrumental para probar la parte (2).

Problema 4.11. *¿Existe un análogo al Teorema 4.7 en el contexto de las acciones fuertemente externas de grupos no amenables en álgebras fuertemente autoabsorbentes? ¿Y en el contexto de acciones externas en el factor hiperfinito de tipo II_1?*

Referencias

[1] L. P. Bowen, *A measure-conjugacy invariant for free group actions*, Ann. of Math. (2), 171 (2010), pp. 1387–1400.

[2] L. Bowen, D. Hoff, and A. Ioana, *von Neumann's problem and extensions of non-amenable equivalence relations*, Groups, Geometry, and Dynamics, to appear.

[3] A. Connes, J. Feldman, and B. Weiss, *An amenable equivalence relation is generated by a single transformation*, Ergod. Th. Dynam. Sys. 1 (1981), pp. 431–450.

[4] A. Connes and B. Weiss, *Property T and asymptotically invariant sequences*, Israel J. Math. 37 (1980), no. 3, pp. 209–210.

[5] R. Downey and A. Montalbán, *The isomorphism problem for torsion-free abelian groups is analytic complete*, J. Algebra 320 (2008), no. 6, pp. 2291–2300.

[6] H. A. Dye, *On groups of measure preserving transformations. II*, Amer. J. Math., 85 (1963), pp. 551–576.
[7] I. Epstein, *Orbit inequivalent actions of non-amenable groups* (2007) Preprint, arXiv:0707.4215.
[8] M. Foreman, D. Rudolph, and B. Weiss, *The conjugacy problem in ergodic theory*, Ann. Math. 173 (2011), no. 3, pp. 1529–1586.
[9] D. Gaboriau and R. Lyons, *A measurable-group-theoretic solution to von Neumann's problem*, Invent. Math., 177 (2009), pp. 533–540.
[10] D. Gaboriau and S. Popa, *An uncountable family of nonorbit equivalent actions of* $\mathbb{F}_n$, J. Amer. Math. Soc., 18 (2005), pp. 547–559.
[11] E. Gardella and M. Lupini, *Actions of rigid groups on UHF-algebras*, J. Funct. Anal., to appear (2018).
[12] E. Gardella and M. Lupini, *On the classification problem of free ergodic actions of nonamenable groups*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 355 (2017), no. 10, pp. 1037–1040.
[13] E. Gardella and M. Lupini, *The Borel complexity of conjugacy, orbit equivalence, and von Neumann equivalence of actions of nonamenable groups*, (2017). Preprint, arXiv:1708.01327.
[14] T. Giordano, I. Putnam, and C. Skau, *Topological orbit equivalence and* C^**-crossed products*, J. Reine Angew. Math., 469 (1995), pp. 51–111.
[15] P. R. Halmos, *Lectures on ergodic theory*, Chelsea Publishing Co., New York, 1960.
[16] G. Hjorth, *A converse to Dye's theorem*, Trans. Amer. Math. Soc., 357 (2005), pp. 3083-–3103.
[17] G. Hjorth, *The isomorphism relation on countable torsion free abelian groups*, Fund. Math. 175 (2002), no. 3, pp. 241–257.
[18] A. Ioana, *Orbit inequivalent actions for groups containing a copy of* $\mathbb{F}_2$, Invent. Math., 185 (2011), pp. 55–73.
[19] A. S. Kechris, *Global aspects of ergodic group actions*, vol. 160 of Mathematical Surveys and Monographs, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.
[20] A. J.Ol′šanskiĭ, *On the question of the existence of an invariant mean on a group*, Uspekhi Mat. Nauk, 35 (1980), pp. 199–200.
[21] D. S. Ornstein and B. Weiss, *Equivalence of measure preserving transformations*, Mem. Amer. Math. Soc., 37 (1982), pp. xii+116.
[22] A. L. T. Paterson, *Amenability*, Mathematical Surveys and Monographs, 29. American Mathematical Society, Providence, RI, 1988.
[23] I. M. Singer, *Automorphisms of finite factors*, Amer. J. Math., 77 (1977), pp. 117–133.

Westfälische Wilhelms-Universität Münster, Fachbereich Mathematik.
Einsteinstrasse 62, 48149 Münster, Alemania.
Email address: gardella@uni-muenster.de
URL: http://wwwmath.uni-muenster.de/u/gardella/