Publicaciones Matemáticas del Uruguay
Volumen 17, Julio 2019, Páginas 247–259
S 0797-1443

UNA INTRODUCCIÓN A MODELOS MATEMÁTICOS PARA COMPOSICIÓN AUTOMÁTICA DE MÚSICA TONAL

VERÓNICA RUMBO

1. Introducción

En este trabajo se procura hacer una breve presentación de algunos modelos explorados en busca de responder la siguiente pregunta: ¿Hasta que punto es posible generar aleatoriamente música con cierto "sentido"? ¿Cómo se puede hacer para aprender los rasgos carácterísticos de un estilo? Para ello será necesario presentar algunas nociones muy básicas de teoría musical que serán necesarias para los ejemplos que se propondrán a continuación.

Consideremos un modelo –bastante simplificado– en el cual un sonido está determinado por dos parámetros:

- **Altura:** depende la frecuencia del sonido percibido y se asocia con la condición de *grave* o *agudo* de éste.
- **Duración:** es la longitud del sonido en el tiempo.

Supondremos que los valores que estos parámetros toman son discretos. Se le llama *nota* a un par (altura, duración). Cuando trabajemos sólo con alturas la palabra "nota" podrá aparecer también en referencia a alturas.

En este contexto, llamaremos melodía a una secuencia de notas (alturas) y supondremos que cada nota depende –a lo sumo– de la anterior.

En el tipo de música con el que trabajaremos (conocida como *música tonal*) las notas están fuertemente jerarquizadas, distribuyendo sus roles en torno a una nota principal denominada tónica. Para que nuestros ejemplos respeten esta jerarquía elegiremos manualmente el subconjunto de notas posibles a utilizar.[1]

Otros conceptos importantes son los de *armonía* y *acorde*. Un acorde suele definirse como un conjunto de notas tocadas simultáneamente, sin embargo, incluso en las melodías en las que no hay superposición de voces suele haber siempre acordes subyacentes, cada uno de los cuales tiene una función y se combinan de acuerdo a ciertas reglas. Armonía refiere justamente a esa combinación de acordes, así como a la disciplina que trata cómo combinarlos.

No nos detendremos en la clasificación de acordes ni en los criterios para determinar un acorde que no siempre es explícito. A los efectos de comprender el trabajo basta entender el acorde como conjunto de (habitualmente 3 o 4) notas, por lo general sin distinción de octava. Mientras rige un acorde, las notas de uso prioritario en la melodía son precisamente las notas que lo integran y el uso de las demás notas queda supeditado a éstas (es decir, se usan como ornamentos o puentes entre notas del acorde).

[1] También pueden utilizarse todas las notas disponibles, estimando sus probabilidades de aparición a partir de un conjunto de melodías. Un ejemplo con este enfoque puede verse en [6]

2. Modelando alturas: Cadenas de Markov con restricciones

2.1. Algunos conceptos básicos. En primer lugar nos enfocaremos en modelar las alturas, para lo cual utilizaremos cadenas de Markov, es decir, sucesiones de variables aleatorias que dependen (a lo sumo) de la variable inmediatamente anterior. Se presentan a continuación algunas definiciones y propiedades básicas que necesitaremos, para una introducción más detallada a cadenas de Markov en espacios finitos se sugiere consultar [2].

Definición 2.1. Sean $E = \{e_i\}_{i\in I} \subset \mathbb{R}$ un conjunto finito o numerable con una numeración I [2], $\mu = (\mu_i)_{i\in I}$ un vector o familia numerable de reales positivos con $\sum_{i\in I} \mu_i = 1$ y $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias que toman valores en E. Diremos que $\{X_k\}$ es una cadena de Markov con espacio de estados E y distribución inicial μ si:

- X_0 tiene distribución μ, es decir, si $P(X_0 = e_i) = \mu_i$, $\forall i \in I$.
- Para todo $n \in \mathbb{N}$ y para toda n-upla $e_{i_0}, e_{i_1}, ..., e_{i_n}$ de elementos de E se cumple que

$$P(X_n = e_{i_n}|X_{n-1} = e_{i_{n-1}}, X_{n-2} = e_{i_{n-2}}, ..., X_0 = e_{i_0}) = \\ = P(X_n = e_{i_n}|X_{n-1} = e_{i_{n-1}}).$$

Al conjunto E lo denominamos *espacio de estados* mientras que a μ lo llamamos *distribución inicial*

Si en una cadena de Markov se tiene que para todo par de estados e_i, e_j las probabilidades $P(X_n = e_j|X_{n-1} = e_i)$ no dependen de n se dice que la cadena es *homogénea* (en el tiempo). En ese caso tiene sentido denominar a dicha probabilidad como p_{ij} (la probabilidad de ir de i a j en un paso). Si la cadena no es homogénea será necesario también indicar el instante considerado.

Para simplificar la notación, asumiremos en general que el espacio de estados es de la forma $\{1, \ldots, n\}$ o bien $\mathbb{N}$ (eventualmente $\mathbb{Z}$) si el espacio es infinito). No se pierde generalidad, ya que simplemente identificamos el espacio de estados E con la numeración I. Asimismo, notaremos $p_{ij} := P(X_1 = j|X_0 = i)$.

Definición 2.2. Sea $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una cadena de Markov homogénea con espacio de estados E como en la definición 2.1. Definimos su matriz de transición P como la matriz $(p_{ij})_{i,j\in E}$ tal que $p_{ij} = P(X_n = j|X_{n-1} = i)$.

Observación 2.3.
- Las entradas de una matriz de transición p_{ij} verifican que $\sum_{j\in I} p_{ij} = 1$ para todo $i \in E$. Decimos que tales matrices son *estocásticas.*
- Para el caso de las cadenas no homogéneas puede definirse una familia de matrices $\{P^{(n)}\}$ con entradas $p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j|X_{n-1} = i)$.

Definición 2.4. Dada $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ cadena de Markov con espacio de estados E, matriz de transición P y distribución inicial μ definimos su *matriz de transición de orden* n como[3]

$$P^n = (p_{ij}^n)_{i,j\in E}, \quad \text{siendo} \quad p_{ij}^n = P(X_n = j|X_0 = i),$$

[2] Se puede pensar por ejemplo en que el espacio de estados es $\{1, \ldots N\}$ o $\mathbb{N}$ según corresponda

[3] No confundir con $P^{(n)}$, la matriz de transición del tiempo $n-1$ al n en cadenas no homogéneas definida antes.

donde las probabilidades p_{ij}^n se denominan *probabilidades de transición de orden n*. Asimismo, llamaremos *distribución de probabilidad de orden n* al vector

$$\mu^n = (\mu_i^n)_{i \in E}, \quad \text{siendo} \quad \mu_i^n = P(X_n = i).$$

Cabe notar que P^n es por el momento sólo una notación y no refiere a la potencia la matriz P. Sin embargo se puede probar que ambas coinciden.

Proposición 2.5. *Sea $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una cadena de Markov con espacio de estados E, matriz de transición $P = (p_{ij})$ y distribución inicial μ. Para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple:*

1. *P^n definida como antes es también la enésima potencia de la matriz P.*
2. *$\mu^n = \mu \times P^n, \forall n \in \mathbb{N}$.*

Además la probabilidad de una trayectoria $s_0, s_1 \dots, s_n$ dada es

$$\begin{aligned} P(X_n = s_n, &X_{n-1} = s_{n-1}, \dots, X_0 = s_0) = \\ &= P(X_n = s_n | X_{n-1} = s_{n-1}) P(X_{n-1} = s_{n-1} | X_{n-2} = s_{n-2}) \dots \\ &\quad \dots P(X_1 = s_1 | X_0 = s_0) P(X_0 = s_0) = \\ &= p_{s_{n-1} s_n} p_{s_{n-2} s_{n-1}} \dots p_{01} \mu_{s_0}. \end{aligned}$$

De ese modo una cadena de Markov (homogénea) queda determinada por su espacio de estados, su distribución inicial y una matriz estocástica que será su matriz de transición.

Ejemplo 2.6 (Paseos al azar). Si $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d. que toman valores en $\mathbb{Z}$ se tiene que $S_k = \sum_{i=1}^k X_i$ es una cadena de Markov. En efecto, si $i_1, \dots, i_n$ son números enteros,

$$\begin{aligned} P(S_n = i_n | S_{n-1} = &i_{n-1}, \dots, S_0 = i_0) = \\ &= P(\sum_{i=1}^{n} X_k = i_n | \sum_{i=1}^{n-1} X_k = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) \\ &= P(X_n + i_{n-1} = i_n) = P(X_n = i_n - i_{n-1}). \end{aligned}$$

Lo mismo ocurre al calcular $P(S_n = i_n | S_{n-1} = i_{n-1})$ ya que por la independencia de $\{X_k\}$ lo único que se necesita es conocer el valor de la suma parcial en el instante $n-1$.

Además, dados $i, j \in \mathbb{Z}$ la probabilidad de transición de i a j es d_{j-i}, notando $d_k := P(X = k)$. Así, considerando los propios estados como índices la matriz de transición resulta ser $P = (p_{ij})_{i,j} = (d_{j-i})_{i,j}$.

Este ejemplo nos da una estrategia (bastante ingenua) para generar secuencias de alturas: Se simula $\{X_0, \dots, X_n\}$ una trayectoria de un paseo al azar en $\mathbb{Z}$, asociando a cada estado una altura (considerando por ejemplo notas de cierta escala o acorde).

¿Cómo simular el paseo al azar? Si consideramos, por ejemplo, un estado inicial X_0 fijo y trayectorias de largo finito, el paseo al azar se comporta como una cadena de Markov con espacio de estados finitos (ya que el conjunto de los enteros a los que se llega con probabilidad no nula es finito). Para tales cadenas tenemos el siguiente esquema de simulación:

- Simular X_0 con distribución μ.
- Para $k \geq 1$, si $X_{k-1} = i$ simular X_k con distribución $(p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{in})$ (es decir la i-ésima fila de la matriz de transición).

Para una descripción más detallada del procedimiento puede consultarse [2].

2.2. Estimación de las probabilidades. Para simular paseos con el procedimiento anterior es necesario disponer de la distribución inicial y la matriz de transición. Una posible estrategia para elegirlas consiste en "aprenderlas" a partir de una familia de trayectorias[4] (que suponemos se comportan de acuerdo a la cadena).

Supongamos que observamos un conjunto finito $S = \{s^n\}_{n\in\{1,\dots,N\}}$ de trayectorias finitas e independientes entre sí de una cadena de Markov homogénea con espacio de estados finito. Podemos estimar su distribución inicial y matriz de transición estimando sus entradas por máxima verosimilitud, es decir,

$$\hat{\mu_i} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{n=N} \mathbb{1}_{\{s_0^n=i\}},$$

$$\hat{p}_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{N_i}\sum_{n=1}^{n=N}\sum_{s_k:s_{k-1}=i} \mathbb{1}_{\{s_k=j\}}, & \text{si } N_i \neq 0,\\ 0, & \text{si } N_i = 0, \end{cases}$$

con $N_i = \sum_{n\in\{1,\dots,N\}} \#\{s_k : s_{k-1} = i\}$ la cantidad total de observaciones precedidas por i. En otras palabras, $\hat{\mu_i}$ es la proporción de trayectorias que comienza en i, y para hallar $\hat{p_{ij}}$ se consideran todas las transiciones en S que comienzan en i, calculando la proporción de éstas que resuelve en j.

Observación 2.7. El procedimiento anterior se utiliza para la estimación de cadenas homogéneas en general, no únicamente paseos al azar.

A la hora de modelar música, elegir bien el conjunto de trayectorias (melodías) sobre los cuales estimar es importante. Por ejemplo al generar música tonal consideramos para la estimación melodías en la misma tonalidad. De este modo las notas y transiciones "extrañas" aparecen con baja probabilidad. Otra posibilidad es establecer a priori que notas pueden utilizarse (y luego estimar las probabilidades restantes).

2.3. Agregando restricciones. El modelo anterior tiene varias falencias para simular melodías, siendo una muy importante que no permite controlar el comportamiento futuro de las trayectorias. Por ejemplo, modificando la distribución inicial es posible crear trayectorias con estado inicial X_0 fijo, pero no podemos fijar el estado X_k para k mayores (su comportamiento está dado por el vector μ^k, distribución de probabilidad de orden k). Es decir, no podemos elegir en que nota terminarán las melodías que simulamos[5].

Para resolver este problema utilizaremos ciertas cadenas de Markov no homogéneas que nos permitirán imponer cierto tipo de *restricciones* sobre las trayectorias. Estas cadenas (que llamaremos cadenas de Markov con restricciones) y su uso en la generación de melodías son presentadas en detalle por Pachet, Roy y Barbieri en [4].

Comencemos enunciando una generalización de la propiedad 2.5 al caso de cadenas no necesariamente homogéneas:

Proposición 2.8. *Sean $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una cadena de Markov con espacio de estados E, matrices de transición $P^{(k)} = (p_{ij}^{(k)})$ y distribución inicial μ, y n, m naturales con $n > m$. Se cumple:*

---

[4]Es decir, secuencias finitas de variables, no necesariamente del mismo largo

[5]En caso de hacerlo, la trayectoria resultante podría tener probabilidad nula de ocurrir.

1. *Si llamamos* $P_{nm} = (p_{ij}(n,m))_{i,j\in E}$ *a la matriz cuyas entradas son las probabilidades de transición de* i *a* j *en* $n-m$ *pasos partiendo de* i *en el instante* m (i.e, $p_{ij}(n,m) = P(X_n = j|X_m = i)$), *entonces se verifica que* $P_{nm} = P^{(m+1)}P^{(m+2)}\dots P^{(n)}$.
2. *Se cumple que* $\mu^n = \mu \times P_{n0} = \mu P^{(1)}P^{(2)}\dots P^{(n)}, \forall n \in \mathbb{N}$, *siendo* μ^n *la distribución en el instante* n.
3. *Las probabilidades de la forma* $P(X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_m = i_m)$ *pueden calcularse como*

$$P(X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_m = i_m) = p^{(n)}_{i_{n-1}i_n} p^{(n-1)}_{i_{n-2}i_{n-1}} \dots p^{(m+1)}_{i_m i_{m+1}} \mu^{(m)}_{i_m}.$$

Necesitamos ahora definir que entenderemos por *restricciones*. Informalmente, supongamos que queremos obtener trayectorias finitas $x_0, x_1, \dots, x_N$ a partir de una cadena de Markov, de forma tal que podamos imponer algunas condiciones para el comportamiento de la cadena en los distintos instantes $0, 1, \dots, N$. Dichas condiciones podemos clasificarlas como:

- **Restricciones unitarias:** son condiciones que refieren a un único instante $k \in \{0, 1, \dots N\}$ (siendo $N \in \mathbb{Z}^+$ el largo de la trayectoria a considerar) y consisten en indicar cuáles son los estados que puede tomar la variable X_k.
- **Restricciones binarias:** son condiciones que refieren a dos instantes consecutivos k y $k+1$ ($k \in \mathbb{N}$) e indican cuáles son los pares de estados posibles en X_k y X_{k+1}.

Veremos que es posible considerar este tipo de restricciones sin perder la condición de Markov. Sin embargo no será posible considerar restricciones que involucren a más de 2 estados consecutivos ya que la "pérdida de memoria" de las cadenas de Markov lo impide[6].

Definamos más rigurosamente las restricciones.

Definición 2.9. Sea $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una cadena de Markov con espacio de estados E. Para todo $n \in \mathbb{N}$ definimos $U_n \subset E$ *restricciones (unitarias) sobre el instante* n como el conjunto de los estados en los que la variable X_n tiene probabilidad positiva, es decir,

$$U_n := \{i \in E : P(X_n = i) > 0\}.$$

Asimismo para $n \geq 1$ definimos $B_n \subset E \times E$ conjunto de *restricciones (binarias) sobre la transición de* $n-1$ *a* n como los pares de estados en los que el vector (X_{n-1}, X_n) tiene probabilidad positiva, es decir:

$$B_n = \{(i,j) \in E \times E : P(X_{n-1} = i, X_n = j) > 0\}.$$

Nos interesará, dada de una cadena de Markov homogénea, modificarla imponiendo algunas restricciones adicionales. De esto resultará en una cadena no homogénea, cuyas restricciones estarán contenidas en las de la original. Un ejemplo de aplicación de restricciones sobre el paseo al azar puede verse en [6].

Observemos que al imponer restricciones es de esperarse que se reduzca el espacio de trayectorias posibles (i.e. que tienen probabilidad positiva). Se definirán pues las nuevas probabilidades de transición de modo que las trayectorias prohibidas por las

[6]En general, para cadenas de orden N pueden considerarse restricciones que involucren hasta N estados consecutivos.

restricciones tengan probabilidad nula y las demás tendrán la probabilidad condicionada al nuevo conjunto de trayectorias posibles. Es decir, dada una trayectoria s definiremos su nueva probabilidad $\tilde{P}(s)$ del siguiente modo:

$$\tilde{P}(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s \notin S', \\ P(s|s \in S') & \text{si } s \in S', \end{cases} \tag{1}$$

donde S' es el conjunto de las trayectorias que satisfacen las restricciones y P la probabilidad bajo la cadena homogénea. Más adelante determinaremos las probabilidades de transición bajo estas condiciones.

Notemos que es necesario asegurar cierta consistencia en las restricciones si queremos que el nuevo conjunto de trayectorias posibles sea no vacío. Para formalizar esto consideremos la siguiente definición.

Definición 2.10. Sean $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una cadena de Markov con espacio de estados E, $N \geq 2$ un número entero, $\{U_n\}_{n\in\{0,\ldots,N\}}$ una familia de subconjuntos de E y $\{B_n\}_{n\in\{1,\ldots,N\}}$ una familia de subconjuntos de $E \times E$. Diremos que $\{U_n\}$ y $\{B_n\}$ son *consistentes por caminos* como restricciones de la cadena si para todo $n \in \{0, \ldots, N-1\}$ se verifica que

$$\forall i \in U_n \; \exists j \in U_{n+1} \; / \; (i, j) \in B_{n+1}.$$

Además, diremos que una secuencia de estados $i_0, i_1, \ldots, i_l$ con $l \leq N$ es *consistente* si puede realizarse verificando todas las restricciones, es decir si cumple:

- $i_k \in U_k \; \forall k \in \{0, \ldots, l\}$,
- $(i_{k-1}, i_k) \in B_k \; \forall k \in \{1, \ldots, l\}$.

En palabras, que las restricciones sean consistentes por caminos asegura que toda trayectoria que comience verificando las restricciones podrá terminar haciéndolo, como se muestra en la siguiente proposición.

Proposición 2.11. *Sean E un espacio de estados, $N \geq 2$ entero y $\{U_n\}_{n\in 0,\ldots,N}$ y $\{B_n\}_{n\in 1,\ldots N}$ familias de restricciones unitarias y binarias respectivamente. Si dichas restricciones son consistentes por caminos para toda trayectoria parcial consistente $i_0, i_1, \ldots, i_l$ con $l < N$ (es decir, que puede realizarse verificando las restricciones para los instantes 0 a l) se cumple:*

1. *Existe $i_{l+1} \in U_{l+1}$ tal que $i_0, i_1, \ldots, i_l, i_{l+i}$ es consistente.*
2. *La trayectoria $i_0, i_1, \ldots, i_l, i_{l+1}$ es consistente si y sólo si i_l, i_{l+1} lo es.*

Demostración.

1. Como la trayectoria $i_0, i_1, ..., i_l$ es consistente sabemos que $i_l \in U_l$ y como las restricciones son consistentes por caminos, para $i_l \in U_l$ tenemos $i_{l+1} \in U_{l+1}$ tal que $(i_l, i_{l+1}) \in B_{l+1}$. Luego la trayectoria $i_0, \ldots i_{l+1}$ resulta consistente.
2. Veamos que si i_l, i_{l+1} es consistente, la secuencia entera lo es (la otra implicancia es inmediata). Para ello basta notar que como la secuencia $i_0, i_1, \ldots, i_l$ es consistente, y i_l, i_{l+1} también, se tiene que $i_k \in U_k \; \forall k \in \{0, 1, \ldots l+1\}$ y $(i_{k-1}, i_k) \in B_k \; \forall k \in \{1, \ldots l+1\}$ lo cual concluye la demostración.

□

Con esta proposición podemos dar un algoritmo para determinar las nuevas restricciones de modo tal que sean consistentes por caminos, **siempre y cuando en la cadena original exista alguna trayectoria con probabilidad positiva que verifique las condiciones que queremos imponer**. Para ello pondremos el foco en la propagación de las restricciones unitarias, mientras que las restricciones binarias que de ello se desprendan quedarán de hecho impuestas en las matrices de transición.

- **Fijando un estado:** si se quiere imponer una condición de la forma $U_k = \{a\}$, hay que eliminar de U_{k+1} todos los estados a los que no se puede acceder desde a, es decir, los $b \in E \;/ P(X_{k+1} = b|X_k = a) = 0$. De modo similar, hay que quitar de U_{k-1} los estados que no pueden ir hacia a, que son los $b \in E$ tales que $P(X_k = a|X_{k-1} = b) = 0$. Una vez removidos estos estados hay que seguir propagando las restricciones que generó la remoción de más estados, de acuerdo a lo siguiente.
- **Removiendo estados:** si se quiere quitar un estado a del conjunto U_k, habra que quitar de U_{k+1} todos los estados a los que sólo se puede acceder desde a, esto es, quitar los $b \in E$ tales que $P(U_{k+1} = b|U_k = c) = 0 \; \forall c \neq a$. De U_{k-1} quitaremos los estados que sólo podían ir hacia a, es decir los $b \in E$ tales que $P(X_k = c|X_{k-1} = b) = 0 \; \forall c \neq a$.

El proceso termina cuando las restricciones son consistentes por caminos, esto es, cuando en los pasos anteriores no hay más nada por hacer. Nótese que si hay al menos una trayectoria con probabilidad no nula en la cadena original que satisface las restricciones, el procedimiento anterior preserva los estados y trayectorias involucrados y por lo tanto el espacio de restricciones resultante no tiene conjuntos vacíos.

Veamos ahora cómo construir las matrices de transición $\{\tilde{P}^{(n)}\}_{\{i \in 1,\ldots,N\}}$ de una cadena con restricciones. Para ello tenemos inicialmente una cadena homogénea $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ con distribución inicial μ y matriz de transición P, N un entero positivo y $\{U_n\}_{n\in\{0,\ldots,N\}}$, $\{B_n\}_{n\in\{1,\ldots,N\}}$ conjuntos de restricciones unitarias y binarias **consistentes por caminos** que queremos imponer. El procedimiento general consiste en

- Construir una familia auxiliar de matrices $\{Z^{(n)}\}_{\{i\in 1,\ldots,N\}}$ que indica que estados y transiciones están permitidos. Estas matrices generalmente no son estocásticas
- Renormalizar las matrices obtenidas de modo que sean estocásticas[7] y respeten la condición (1).

Construimos la familia $\{Z^{(n)}\}_{n\in\{0,\ldots N\}}$ del siguiente modo:

- **Inicialización.** Definimos $Z^{(0)} = \mu$ y $Z^{(n)} = P \; \forall n \in \{1, \ldots, N\}$.
- **Remoción de estados.** Llamemos $z_{ij}^{(n)}$ a la entrada i, j de la matriz $Z^{(n)}$ Para cada $j \in E$ removido de U_n, se establece $z_{ij}^{(n)} = 0 \; \forall i \in E$ (es decir, se lleva la j-ésima columna de la matriz a 0).
- **Remoción de transiciones.** Las transiciones prohibidas imponen ceros en las matrices del siguiente modo: $\forall i, j \in E, \; n \in \{1, \ldots, N\}$ tales que $(i, j) \notin B_n$ se establece $z_{ij}^{(n)} = 0$.

Llamemos S al conjunto de trayectorias de largo N posibles para la cadena homogénea original. Al imponer restricciones queda determinado un subconjunto $S' \subset S$ que contiene únicamente a las trayectorias que verifican las restricciones. Para cada trayectoria $i = i_0 i_1 \ldots i_N \in S'$ queremos definir $\{\tilde{P}^{(n)}\}$ de modo que la nueva probabilidad sea $\tilde{P}(i) = P(i|i \in S')$ (siendo $\tilde{P}(i) = 0$ si $i \notin S'$). Cabe notar

[7]Abusando de la nomenclatura, admitiremos por estocásticas matrices que tengan filas de ceros.

que este modo de definir las probabilidades **no** es equivalente a renormalizar las matrices $Z^{(n)}$ por filas.

El siguiente resultado nos permite construir las nuevas matrices de transición.

Teorema 2.12. *Consideremos $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una cadena de Markov homogénea en E finito con distribución inicial μ y matriz de transición P, $N \geq 2$ un entero, $\{U_n\}_{n\in\{0,\dots,N\}}$, $\{B_n\}_{n\in\{1,\dots,N\}}$ familias de restricciones –unitarias y binarias respectivamente– consistentes por caminos, y $\{Z^{(n)}\}_{n\in\{1,\dots,N\}}$ matrices construidas según el procedimiento anterior. Definiremos las matrices de transición $\{\tilde{P}^{(n)}\}$, $n \in \{1,\dots,N\}$, con $\tilde{P}^{(n)} = (\tilde{p}_{ij}^{(n)})_{i,j}$ de modo que,*

$$\begin{aligned}
\tilde{p}_{ij}^{(N)} &= \tfrac{z_{ij}^{(N)}}{\alpha_i^{(N)}}, \qquad \textit{siendo} \quad \alpha_i^{(N)} = \sum_{k\in E} z_{ik}^{(N)}, \\
\tilde{p}_{ij}^{(n)} &= \tfrac{\alpha_j^{(n+1)} z_{ij}^{(n)}}{\alpha_i^{(n)}}, \quad \textit{siendo} \quad \alpha_i^{(n)} = \sum_{k\in E} \alpha_k^{(n+1)} z_{ik}^{(n)} \ \forall n \in \{1,\dots,N-1\}.
\end{aligned}$$

Y la distribución inicial $\tilde{\mu}$ de modo que

$$\tilde{\mu}_i = \tfrac{\alpha_i^{(1)} z_i^{(0)}}{\alpha^{(0)}}, \quad \textit{con} \quad \alpha^{(0)} = \sum_{k\in E} \alpha_k^{(1)} z_k^{(0)}.$$

En caso de que $\alpha_i^{(n)} = 0$ las expresiones de los $p_{ij}^{(n)}$ son de la forma $\frac{0}{0}$ e impondremos $p_{ij}^{(n)} = 0$. Entonces la cadena (no homogénea) de trayectorias finitas, con matrices de transición $\{\tilde{P}^{(n)}\}_{n\in\{1,\dots,N\}}$ y distribución inicial $\tilde{\mu}$ definidas como antes verifica la condición (1)*.*

En palabras, el procedimiento para hallar las matrices de transición consiste en normalizar individualmente la matriz correspondiente a la última transición, para luego propagar la normalización hacia atrás de modo que cumpla la propiedad buscada, como se verá en la demostración.

Demostración. La demostración de que las matrices $\tilde{P}^{(n)}$ son estocásticas y que $\tilde{\mu}^{(n)}$ es distribución puede verse en [6]. Verificaremos directamente que se cumple la condición (1), para lo cual consideramos una trayectoria $s = s_0, s_1, \dots, s_N$ que verifica las restriciones (en caso contrario es inmediato que $\tilde{P}(s) = 0$). Tenemos entonces,

$$\begin{aligned}
\tilde{P}(s) &= \tilde{\mu}_{s_0} p_{s_0 s_1}^{(1)} p_{s_1 s_2}^{(2)} \dots p_{s_{N-1} s_N}^{(N)} \\
&= \frac{\cancel{\alpha_{s_0}^{(1)}} z_{s_0}^{(0)}}{\alpha^{(0)}} \frac{\cancel{\alpha_{s_1}^{(2)}} z_{s_0 s_1}^{(1)}}{\cancel{\alpha_{s_0}^{(1)}}} \dots \frac{\cancel{\alpha_{s_{N-1}}^{(N)}} z_{s_{N-2} s_{N-1}}^{(N-1)}}{\cancel{\alpha_{s_{N-2}}^{(N-1)}}} \frac{z_{s_{N-1} s_N}^{(N)}}{\cancel{\alpha_{s_{N-1}}^{(N)}}} \\
&= \frac{1}{\alpha^{(0)}} z_{s_0}^{(0)} z_{s_0 s_1}^{(1)} \dots z_{s_{N-2} s_{N-1}}^{(N-1)} z_{s_{N-1} s_N}^{(N)},
\end{aligned}$$

donde el producto resultante $z_{s_0}^{(0)} z_{s_0 s_1}^{(1)} \dots z_{s_{N-2} s_{N-1}}^{(N-1)} z_{s_{N-1} s_N}^{(N)}$ es no nulo ya que s verifica las restricciones. Más aún, por construcción, se tiene que si $z_{ij}^{(n)} \neq 0$,

$z_{ij}^{(n)} = p_{ij}$ y $z_i^{(0)} = \mu_i$ con lo cual,

$$\begin{aligned}\tilde{P}(s) &= \frac{1}{\alpha^{(0)}} z_{s_0}^{(0)} z_{s_0 s_1}^{(1)} \dots z_{s_{N-2} s_{N-1}}^{(N)} z_{s_{N-1} s_N}^{(N)} \\ &= \frac{1}{\alpha^{(0)}} \mu_{s_0} p_{s_0 s_1} \dots p_{s_{N-1} s_N} \\ &= \frac{1}{\alpha^{(0)}} P(s),\end{aligned}$$

siendo P la probabilidad bajo la cadena homogénea. Es decir, toda trayectoria s que cumpla las restricciones verifica $\tilde{P}(s) = cP(s)$ donde $c = \frac{1}{\alpha^{(0)}}$ es una constante que no depende de s. Luego si S' es el conjunto de trayectorias que verifican las restricciones se tiene que $\tilde{P}(S') = 1$. Por lo tanto $P(S') = \alpha^{(0)}$ y

$$\tilde{P}(s) = \frac{P(s)}{P(S')} = P(s|s \in S') \ \forall s \in S'.$$

Lo cual verifica la condición (1) y concluye la demostración. □

Tenemos así un algoritmo que nos permite, dada una cadena de Markov homogénea y ciertas restricciones, determinar todos los parámetros de la cadena inducida por las mismas.

2.4. Una aplicación a simulación de melodías. En el siguiente ejemplo consideramos una melodía preexistente ("Arroz con leche") e intentamos generar otras que puedan percibirse como "variaciones" del tema original. Para ello preservamos

- La estructura rítmica, es decir, la cantidad y duraciones de las notas originales.
- Algunas notas –convenientemente elegidas– de la melodía.
- La estructura armónica, es decir, los acordes subyacentes.

Las notas preservadas oficiarán como restricciones unitarias de una cadena de Markov cuya matriz de transición "inicial" (es decir, previo a la implementación de las restricciones) es $P = (p_{ij})$ con

$$p_{ii+1} = p, \quad p_{ii} = q \quad , p_{ii-1} = r,$$

con $p + q + r = 1$. En los demás casos $p_{ij} = 0$. Los valores de p, q y r empleados se estimaron de la melodía original[8]. Se conservan las notas que aparecen en cada cambio de acorde, y se elige como diccionario a utilizar el conjunto de las notas del acorde.

FIGURA 1. Partitura de la melodía de Arroz con leche, con sus acordes cifrados arriba.

[8]Notar que dicha estimación es anecdótica, en tanto se realizó sobre una conjunto muy pequeño de transiciones.

Observemos ahora la partitura de uno de los ejemplos simulados.

Figura 2. Una de las variaciones simuladas.

El audio, así como otros ejemplos y el código para generarlos, se encuentran en [7].

Nótese que la elección de las notas asociadas a cada estado se hizo de forma manual, al igual que la determinación de los acordes y la región asociada a éstos. Una vez determinado esto se pueden generar automáticamente tantas variaciones como se quiera, sin embargo no es una estrategia viable cuando las piezas con las que se trabaja son muy extensas. Asimismo, resultaría deseable utilizar notas ajenas al acorde sin perder la estructura armónica. Estas son algunas de las limitaciones que el ejemplo presenta.

Para resolver estas situaciones será necesario explorar otros modelos. En particular una breve revisión de modelos Markovianos orientados a la composición musical puede verse en [1].

3. Modelando duraciones

3.1. Esquema basado en compases. Abordaremos a continuación el problema de la simulación de duraciones de modo que tenga cierta estructura métrica. Para ello consideraremos un modelo simplificado en el que la música se organiza en *compases*. Entendemos por compases secciones de igual duración, subdivididas en cierta cantidad de *beats* o golpes. Identificaremos la duración de una nota con el golpe en que esta ocurre, es decir, toda nota ocurre al mismo tiempo que un golpe y sólo nos interesan los instantes de estas ocurrencias (ataques).

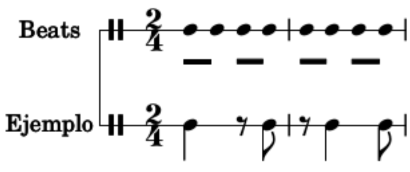

Figura 3. Ejemplo en $2/4$ con golpes de corchea. Se observan dos compases con golpes en 1,4 y 2,4 respecivamente.

Así, la métrica de un compás (dividido en n golpes) puede verse como un subconjunto de $\{1, \ldots, n\}$ que indica en que golpes ocurrió una nota. El objetivo es, entonces, construir secuencias de compases, eligiendo adecuadamente los instantes de ataque de las notas. Para ello Temperley [8] propone algunos modelos, de creciente complejidad:

- Modelo de posición uniforme: En cada golpe decide (con probabilidad p constante) si hay o no un ataque. Las decisiones son independientes y en consecuencia todos los golpes tienen la misma probabilidad de contener un ataque.
- Modelo de orden cero: Se sortea la cantidad de golpes a ocurrir entre ataques. Cada posible valor tiene una probabilidad fija.
- Modelo de posición métrica: En cada golpe se decide si hay o no un ataque, pero la probabilidad de que lo haya depende de la *fuerza* del golpe implicado.
- Modelo de posición refinado: En cada golpe se decide si hay o no un ataque. La probabilidad de que lo haya depende de la posición del golpe en el compás.
- Modelo jerárquico: En cada golpe se decide si hay o no un ataque. La probabilidad de que lo haya depende del *nivel* del golpe y de si hay o no ataques en el golpe de nivel inmediato superior.
- Modelo de orden uno: Se sortea la posición de los ataques, condicionada a la posición del ataque anterior.

En todos los casos hay probabilidades a determinar, las cuales estimaremos por máxima verosimilitud a partir de un *corpus* dado. Tanto en [8] como en el ejemplo que presentaremos se considera parte del Essen Folksong Collection. Temperley describe los 6 modelos utilizando ejemplos en 4/4. Aquí consideraremos únicamente el modelo jerárquico aplicado a compases de 2/4.

Dos conceptos que fueron mencionados en el listado de modelos y nos serán de utilidad son el de *fuerza* y *nivel* de un golpe. En ellos, asumimos que los golpes dentro de cada compás no son equivalentes, sino que hay algunos más fuertes que otros. Se clasifican pues los golpes en *niveles*, correspondiendo niveles más altos a golpes fuertes y niveles más bajos a golpes débiles. Cabe notar que dicha clasificación depende del tipo de compás empleado y se conoce de antemano. Por ejemplo para el compás 2/4 la clasificación en niveles es

FIGURA 4. Niveles propuestos por Temperley para el compás de 2/4. La cantidad de puntos representa el nivel

En [5] puede verse una explicación más detallada de los modelos rítmicos, así como los niveles propuestos para otros compases.

3.2. El modelo jerárquico. Describiremos aquí con un poco más de detalle el modelo jerárquico propuesto por Temperley y lo implementaremos sobre el ejemplo de "Arroz con leche". Como se mencionó en la sección anterior, en este modelo decidiremos si en un golpe hay ataque o no dependiendo de lo que suceda con los golpes de nivel superior más cercanos. Por ejemplo, en los compases de 2/4:

- En el único golpe de nivel 3 (el primero) hay un ataque con probabilidad p fija e independiente de otros compases. Por simplicidad asumimos $p = 1$.
- En el golpe de nivel 2 hay un ataque con probabilidad condicionada a lo que haya ocurrido en los golpes de nivel 3 adyacentes (esto incluye al primer golpe del siguiente compás). Dado que supusimos que siempre hay ataques

en el primer compás el modelo se simplifica y la probabilidad siempre será la misma.

- En los dos golpes de nivel 1 (posiciones 2 y 4) la probabilidad de ataque está condicionada a lo que ocurrió en los golpes 1 y 3 (para el golpe 2) y el 3 y 1 del compás siguiente (para el golpe 4).

Denominamos a estas probabilidades condicionales bi-anclada (si hay ataque en ambos vecinos de nivel superior), pre-anclada (si hay ataque únicamente en el anterior), post-anclada (si hay ataque únicamente en el posterior) o inanclada (si no hay ataque en ninguno de sus dos vecinos). Nótese que en el caso que estamos describiendo no hay probabilidades inancladas.

Estimamos de las obras en 2/4 del corpus Essen las probabilidades condicionales obteniendo

	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3
bi-ancladas	0.573	0.783	1
post-ancladas	0.973	–	–
pre-ancladas	0.0805	–	–
inancladas	–	–	–

Cuadro 1. Probabilidades de ataque en cada golpe. No se incluyen las probabilidades que no se utilizarán en el ejemplo

Se utiliza el modelo para generar la métrica de 16 compases de 2/4, a partir de los cuales luego se simula una variación de "Arroz con leche", es decir, una melodía con las mismas restricciones y armonía que la original. A continuación se muestra uno de los resultados obtenidos.

Figura 5. Partitura de una variación de "Arroz con leche" con melodía y ritmo aleatorios.

3.3. Un tema pendiente: La comparación de modelos. Se obtuvo un primer procedimiento de generación de melodías con alturas y duraciones aleatorias. Resulta bastante limitado en cuanto a la información que requiere (por ejemplo la estructura armónica y/o un diccionario adecuado de notas a usar) y algo conservador en su comportamiento. La exploración de otros modelos (como por ejemplo los propuestos en [8]) introduce una nueva interrogante ¿Qué criterio utilizar para comparar modelos? En ese sentido referimos a Mavromatis [3], quien propone un criterio de selección de modelos basado en el largo de descripción. Así, un buen modelo para un conjunto de datos (por ejemplo de obras musicales) es aquel que permite representarlas más comprimidas (considerando el costo de representar los datos **y** el modelo).

Referencias

[1] Ames, Charles: *The Markov Process as a Compositional Model: a Survey and Tutorial.* Leonardo, 22(2):175–187, 1989.

[2] Häggström, Olle: *Finite Markov Chains and algorithmic applications.* Cambridge University Press, 2002.

[3] Mavromatis, Panayotis: *Minimum description length modelling of musical structure.* Journal of Mathematics and Music, 2009.

[4] Pachet, François, Pierre Roy y Gabriele Barbieri: *Finite-Length Markov Processes with Constraints.* Proceedings of the Twenty-Second International Joint Conference on Artificial Itelligence, páginas 638–642, 2011.

[5] Pearce, Marcus, Daniel Müllensiefen, David Lewis y Christophe Rhodes: *David Temperley, Music and Probability.* 2, Octubre 2007.

[6] Rumbo, Verónica: *Cadenas de Markov con restricciones y aplicación a la composición automática de música tonal.* `http://www.cmat.edu.uy/~vrumbo/monografia`. Trabajo monográfico.

[7] Rumbo, Verónica: *Repositorio online del trabajo monográfico.* `http://www.cmat.edu.uy/~vrumbo/repositorio`.

[8] Temperley, David: *Modeling Common-Practice Rhythm.* Music Perception, 27(5):355–376, 2010. Available at https://openmusiclibrary.org/article/37125/.

CMat, Facultad de Ciencias, Universidad de la República. Montevideo, Uruguay.
Email address: `vrumbo@cmat.edu.uy`