Publicaciones Matemáticas del Uruguay
Volumen 17, Julio 2019, Páginas 277–279
S 0797-1443

RIGIDEZ Y GEOMETRICIDAD DE ACCIONES DE GRUPOS DE SUPERFICIES EN EL CÍRCULO

MAXIME WOLFF

Resumen. Esto es el acta de mi charla en el sexto coloquio uruguayo de matemáticas. Consideramos representaciones desde un grupo de superficie cerrada a $\mathrm{Homeo}^+(S^1)$. Kathryn Mann ha probado que las representaciones geométricas (ie, que levantan a una representacion fiel y discreta en $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$) son rígidas (ie, todas sus deformaciones son semi-conjugadas). Junto con ella, probamos la recíproca: todas las representaciones rígidas son geométricas.

1. Semi-conjugación

El estudio de acciones de grupos sobre el círculo es un tema bastante clásico, empezando desde Poincaré, con la teoría del número de rotación, para resolver problemas de sistemas dinámicos. Más recientemente, la teoría de cohomologia acotada empezó praticamente con el trabajo de Ghys [4], donde caracterizó la dinámica rotacional de una acción en términos de una clase de cohomologia acotada (la clase acotada de Euler). La teoría de las variedades de dimensión tres, con el teorema de geometrización de Thurston, también utiliza acciones de grupos de superficies o de variedades de dimensión tres sobre el círculo, con la caracterización de los fibrados de Seifert a travéz de los grupos de convergencia [11, 3, 2], o el estudio de foliaciones tensas sobre una variedad de dimension tres (ver [1] por ejemplo). Se pueden encontrar muchas más motivaciones y observaciones en el libro [10].

Aquí nos interesa estudiar las *deformaciones* de estas acciones. Entonces, si Γ es un grupo finitamente generado, consideramos el "espacio de representaciones",

$$R_\Gamma = \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{Homeo}^+(S^1)),$$

con la topología producto. Hay una manera bastante obvia de deformar una representación $\rho \in R_\Gamma$, por conjugación: si $g_t \in \mathrm{Homeo}^+(S^1)$ es un camino que empieza en la identidad, entonces $g_t^{-1}\rho g_t$ es una deformación, trivial en el sentido de que no cambia la dinámica de ρ. Una observación de Denjoy es que siempre es posible deformar acciones de otra manera: por ejemplo si $\rho(\Gamma)$ tiene una órbita infinita, digamos, $(x_n)_{n\geq 1}$, se puede construir un nuevo círculo insertando un intervalo de tamaño $\frac{t}{2^n}$ en lugar de x_n, y luego, extender ρ a una acción ρ_t sobre el nuevo círculo. Entre $t = 0$ y $t \neq 0$, estas acciónes tipicamente no son conjugadas (por ejemplo si ρ es minimal), pero tienen la misma dinámica rotacional. Además, son "casi-conjugadas", en el sentido que ρ_t tiene conjugados arbitrariamente cerca de ρ.

Definición 1 (Ghys [4])**.** Decimos que dos acciones ρ_1 y ρ_2 son *semi-conjugadas* si existe un mapa creciente $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $h(x + 1) = h(x) + 1$, y, para cada $\gamma \in \Gamma$, existen levantamientos $\widetilde{\rho_i(\gamma)}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $h \circ \widetilde{\rho_1(\gamma)} = \widetilde{\rho_2(\gamma)} \circ h$.

Esta definición cumple que ρ_1 y ρ_2 son semi-conjugadas si y solamente si *las clausuras* de sus clases de conjugación se intersectan. Así que definimos el "espacio de caracteres",

$$X_\Gamma = R_\Gamma / \sim,$$

donde $\sim$ es la semi-conjugación.

Por el trabajo de Ghys y Matsumoto [4, 8], es fácil ver que X_Γ es el cociente Hausdorff más grande del espacio $R_\Gamma / \operatorname{Homeo}^+(S^1)$, cociente de R_Γ por conjugación. Esta observación permite generalizar la definición de X_Γ a representaciones en otros grupos que $\operatorname{Homeo}^+(S^1)$, y también, de verla como una generalización de los cocientes de la teoría geométrica de los invariantes (GIT), en el caso de representaciones en grupos de Lie.

2. Rígidez y geometricidad

Decimos que una (clase de) representación $[\rho] \in X_\Gamma$ es *rígida*, simplemente si es un punto aislado de X_Γ. El primer ejemplo de representaciones rígidas fue dado por Matsumoto. Si Σ_g es una superficie cerrada de género $g \geq 2$, entonces podemos elegir una estructura hiperbólica sobre Σ_g. El cubrimiento universal de Σ_g, con la métrica levantada, es isométrico al plano $\mathbb{H}^2$, así que la acción natural del grupo fundamental $\pi_1\Sigma_g$ sobre $\mathbb{H}^2$, por isometrias, es un morfismo $\pi_1\Sigma_g \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. Ahora la acción de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \simeq \operatorname{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ sobre el círculo a infinito nos da una representación, $\pi_1\Sigma_g \to \operatorname{Homeo}^+(S^1)$, que llamamos *Fuchsiana.* Diferentes estructuras dan representaciónes Fuchsianas conjugadas en $\operatorname{Homeo}^+(S^1)$, y Matsumoto probó que estas representaciones son rígidas [9]. (Probó un teorema más fuerte, diciendo que todas las representaciónes de clase de Euler maximal son semi-conjugadas a una representación Fuchsiana.)

Mann generalizó este teorema a los levantados de representaciones Fuchsianas. Si $p\colon S^1 \to S^1$ es un cubrimiento de grado k, entonces, se puede verificar que una representación Fuchsiana ρ_F se puede levantar a una representación ρ_F^k, que cumple $\rho_F(\gamma) \circ p = p \circ \rho_F^k(\gamma)$ para cada $\gamma \in \Gamma$, si y solamente si k divide $2g-2$. Estas nuevas representaciónes son geométricas, en el sentido siguiente.

Definición 2 (Mann,[6])**.** Si $G < \operatorname{Homeo}(M)$ es un grupo actuando sobre una variedad M transitivamente, y si Γ es un grupo discreto, decimos que una representación $\rho\colon \Gamma \to G$ es *geométrica* si es fiel y si su imágen es un lattice de un grupo de Lie $H < G$ que actúa transitivamente sobre M.

Aquí, diremos también que una representación es geométrica si es semi-conjugada a una representación geométrica, porque estamos más interesados en clases de semi-conjugación de representaciónes.

Ahora, el teorema de Mann evocado en el abstract es el siguiente.

Teorema 3 (Mann,[5])**.** *Sea Γ un grupo finitamente generado, y sea $\rho\colon \Gamma \to \operatorname{Homeo}^+(S^1)$ una representación geométrica. Entonces ρ es rígida.*

Se puede verificar fácilmente que si $\rho\colon \Gamma \to \operatorname{Homeo}^+(S^1)$ es geométrica entonces Γ puede ser solamente $\mathbb{Z}$ o un grupo de superficie cerrada. Así que el teorema siguiente, que logramos junto con ella, es un recíproco.

Teorema 4 ([7])**.** *Sea $\rho\colon \pi_1\Sigma_g \to \operatorname{Homeo}^+(S^1)$ una representación rígida. Entonces es geométrica.*

Entonces, ahora tenemos la lista completa de los puntos aislados del espacio $X_{\pi_1 \Sigma_g}$. Pero muchas preguntas se quedan abiertas. Por ejemplo, no se sabe si tiene un número finito de componentes conexas.

Referencias

[1] Danny Calegari and Nathan M. Dunfield. Laminations and groups of homeomorphisms of the circle. *Invent. Math.*, 152(1):149–204, 2003.

[2] Andrew Casson and Douglas Jungreis. Convergence groups and Seifert fibered 3-manifolds. *Invent. Math.*, 118(3):441–456, 1994.

[3] David Gabai. Convergence groups are Fuchsian groups. *Ann. of Math.*, 136(3):447–510, 1992.

[4] Étienne Ghys. Groupes d'homéomorphismes du cercle et cohomologie bornée. In *The Lefschetz centennial conference, Part III (Mexico City, 1984)*, volume **58** of *Contemp. Math.*, pages 81–106. Amer. Math. Soc., 1987.

[5] Kathryn Mann. Spaces of surface group representations. *Invent. Math.*, 201(2):669–710, 2015.

[6] Kathryn Mann. Rigidity and flexibility of group actions on S^1. In *Handbook of group actions*. 2017.

[7] Kathryn Mann and Maxime Wolff. Rigidity and geometricity for surface group actions on the circle. arXiv:1710.04902.

[8] Shigenori Matsumoto. Numerical invariants for semiconjugacy of homeomorphisms of the circle. *Proc. AMS*, 98:163–168, 1986.

[9] Shigenori Matsumoto. Some remarks on foliated S^1 bundles. *Invent. Math.*, **90**:343–358, 1987.

[10] Andres Navas. *Groups of Circle Diffeomorphisms*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, 2011.

[11] Pekka Tukia. Homeomorphic conjugates of Fuchsian groups. *J. Reine Angew. Math.*, 391:1–54, 1988.

Sorbonne Universités, UPMC Univ. Paris 06, Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche, UMR 7586, CNRS, Univ. Paris Diderot, Sorbonne Paris Cité, 75005 Paris, France

Email address: `maxime.wolff@imj-prg.fr`