Publicaciones Matemáticas del Uruguay
Volumen 15, Junio 2016, Páginas 109–122
S 0797-1443

K-TEORÍA ALGEBRAICA Y CONJETURAS DE ISOMORFISMO

EUGENIA ELLIS

1. Introducción

La K-teoría algebraica es una rama del álgebra que le asocia a un anillo R una sucesión de grupos abelianos $K_i(R)$, $i \in \mathbb{Z}$. Esta teoría juega un rol importante en varias áreas, especialmente en teoría de números, topología algebraica y geometría algebraica. En este curso nos detendremos a estudiar los grupos $K_0(R)$ y $K_1(R)$ y su conexión con algunos problemas clásicos de la topología algebraica. Nos preguntaremos cuando un CW-complejo X finitamente dominado es homotópicamente equivalente a un CW-complejo finito. Responderemos esta pregunta calculando $K_0(\mathbb{Z}G)$, siendo $G = \pi_1(X)$. También nos preguntaremos cuando un h-cobordismo W es trivial y resolveremos el problema calculando el grupo de Whitehead del grupo fundamental de W. La conjetura de Farrell-Jones tiene como objetivo facilitar el cálculo de los grupos $K_i(RG)$ en donde R es un anillo y G es un grupo. Usando este resultado se pueden probar otras conjeturas más clásicas como la conjetura de Poincaré, la conjetura de Borel y la conjetura de Novikov. Si bien esta conjetura ha sido recientemente probada para una larga lista de grupos (grupos hiperbólicos, grupos CAT(0), $SL_n(R)$, $GL_n(R)$, etc [3]), aún esta abierta para otra lista de grupos (grupos amenables, grupos de automorfismos de una superficie $MCG(S)$, $Out(F_n)$). Tampoco se tiene un contraejemplo o un posible candidato.

Estas notas fueron realizadas para complementar el curso "Introducción a la K-teoría y conjeturas de isomorfismo" que se dictará en el Congreso Uruguayo de Matemática y cuyo objetivo es dar un pantallazo de estos temas. Para una introducción completa a la K-teoría algebraica ver [13] y [19]. Para una introducción completa a las conjeturas de isomorfismo ver [2] y [8]. Para los concéptos básicos de topología algebraica ver [7] y [16].

1.1. Notaciones. Denotaremos por R a un anillo con unidad no necesariamente conmutativo. Los espacios son espacios topológicos de Hausdorff y localmente compactos. Un morfismo entre espacios topológicos siempre será una función continua.

2. El grupo $K_0(R)$ y la obstrucción de finitud de Wall

La K-teoría surge de la necesidad de poner en términos algebraicos ciertos invariantes y obstrucciones que aparecen en la topología. En esta sección presentamos el problema geométrico que lleva a definir la obstrucción de Wall. Definimos el grupo $K_0(R)$, algunas propiedades y su relación con el problema de ver cuando un CW-complejo finitamente dominado es homotópicamente equivalente a un CW-complejo finito.

2.1. CW-complejos. La clasificación de espacios con igual forma puede realizarse de varias maneras. Si X e Y son variedades diferenciables, decimos que son difeomorfas si existe un difeomorfismo $f : X \to Y$ (función diferenciable, invertible y con inversa diferenciable). Si X e Y son espacios topológicos, decimos que son homeomorfos si existe un homeomorfismo $f : X \to Y$ (función continua, invertible y con inversa continua). Existe una relación entre espacios aún más laxa, la equivalencia homotópica. Dos morfismos $f, g : X \to Y$ son homotópicos si existe un morfismo $H : X \times [0,1] \to Y$ tal que $H(x,0) = f(x)$ y $H(x,1) = g(x)$, lo notamos $f \simeq g$. Dos espacios X e Y son homotópicamente equivalentes si existen morfismos $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ tales que $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$ y $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$.

Si X es un espacio con un punto distinguido x_0 y $n \in \mathbb{N}$ se definen los grupos de homotopía $\pi_n(X, x_0)$, ver [7], [16]. Si $f : (X, x_0) \to (Y, f(x_0))$ es un morfismo de espacios también se define $f_n : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, f(x_0))$ un morfismo de grupos. Cuando f_n es un isomorfismo para todo $n \in \mathbb{N}$ decimos que f es una equivalencia débil de homotopía. Si X es conexo por caminos, los grupos $\pi_n(X, x_0)$ para diferentes x_0 son isomorfos y por ese motivo omitiremos el punto distinguido en nuestra notación.

Los CW-complejos son espacios con buen comportamiento en la teoría de homotopía y se forman construyendo bloques llamados *celdas*.

Definición 2.1. Sea X^0 un conjunto discreto. Los puntos de X^0 son las 0-celdas. Definimos el n-esqueleto X^n inductivamente. Supongamos que tenemos construido X^{n-1}. Le pegamos a X^{n-1} discos D^n_α de dimensión n por el borde $\partial D^n_\alpha = S^{n-1}_\alpha$. Las funciones de pegado son morfismos $\varphi_\alpha : S^{n-1}_\alpha \to X^{n-1}$ y la acción de pegado es considerar el sigiente producto cocartesiano

$$\begin{tikzcd} \coprod_\alpha S^{n-1}_\alpha \arrow[r, "\varphi_\alpha"] \arrow[d] & X^{n-1} \arrow[d] \\ \coprod_\alpha D^n_\alpha \arrow[r] & X^n \end{tikzcd}$$

En otras palabras X^n es el espacio cociente de $X^{n-1} \coprod_\alpha D^n_\alpha$ via las identificaciones $x \sim \varphi_\alpha(x)$ para todo $x \in \partial D^n_\alpha$. La n-celda e^n_α es la imagen de $D^n_\alpha - \partial D^n_\alpha$ por el morfismo cociente. Consideramos $X = \bigcup_n X^n$ con la topología débil, i.e. $A \subset X$ es un conjunto abierto (cerrado) sii $A \cap X^n$ es abierto (cerrado) en X^n para cada n. Si $X = X^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$ decimos que X es de dimensión finita y n es la dimensión. Si la cantidad de celdas que pegamos es finita decimos que X es un CW-complejo finito.

Un teorema básico nos dice que todo espacio X tiene una CW-aproximación Y, es decir existe un CW-complejo Y y una equivalencia débil de homotopía $f : X \to Y$. Entonces si estamos estudiando las clases de equivalencia débil de homotopía, siempre podremos considerar un CW-complejo como representante de dicha clase. Decimos que un espacio X es dominado por un espacio Y si existen morfismos $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ tales que $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$. Notemos que esta condición es necesaria pero no suficiente para que f sea una equivalencia homotópica. Un corolario del teorema de CW-aproximación dice que si X es dominado por un CW-complejo entonces es homotópicamente equivalente a un CW-complejo. Un espacio X es finitamente dominado si es dominado por un CW-complejo finito. Es claro que esta condición es necesaria para que X sea homotópicamente equivalente a un CW-complejo finito. La pregunta es cuándo esta condición es suficiente:

¿Cuándo un espacio X finitamente dominado es homotópicamente equivalente a un CW-complejo finito?

Ejercicio 2.2. *Probar que un espacio X es finitamente dominado si y solamente si $X \times S^1$ es homotópicamente equivalente a un CW-complejo finito.*

2.2. Módulos proyectivos. Para contestar esta pregunta de origen topológico introducimos algunos objetos algebraicos.

Proposición 2.3. *Sea P un R-módulo. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. *Existe un R-módulo Q tal que $P \oplus Q$ es un R-módulo libre.*
2. *Todo R-homomorfismo de módulos sobreyectivo $\alpha : M \to P$ tiene inversa a derecha $\beta : P \to M$, i.e. $\alpha \circ \beta = \mathrm{id}_P$.*
3. *Si $\varphi : P \to N$ es un homomorfismo de R-módulos y $\psi : M \to N$ es un homomorfismo de R-módulos sobreyectivo*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\Theta"'] \arrow[d, "\varphi"] & \\ M \arrow[r, "\psi"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

4. *Si $0 \to M_0 \to M_1 \to M_2 \to 0$ es una sucesión exacta de R-módulos, entonces*

$$0 \to \hom_R(P, M_0) \to \hom_R(P, M_1) \to \hom_R(P, M_2) \to 0$$

es exacta.

Definición 2.4. Un R-módulo P es proyectivo si satisface las condiciones de la proposición 2.3.

2.3. El grupo $K_0(R)$. Sea M un monoide abeliano. El grupo de Grothendieck asociado a M es un grupo $G(M)$ y una aplicación $g : M \to G(M)$ tales que se verifica la siguiente propiedad universal: si G es un grupo y $f : M \to G$ es un morfismo de monoides entonces existe un único morfismo de grupos $\hat{f} : G(M) \to G$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "r"] & \\ G(M) \arrow[rr, dashed, "\hat{f}"'] & & G \end{tikzcd}$$

El grupo de Grothendieck asociado a un monoide abeliano M existe y es único a menos de isomorfismos (ver [13] pag. 3).

Consideramos la colección de clases de isomorfismos de R-módulos proyectivos finitamente generados:

$$\mathcal{P}(R) := \{[M] : \ M \text{ es un } R\text{-módulo finitamente generado}\}.$$

La suma directa de R-módulos le da a $\mathcal{P}(R)$ una estructura de monoide abeliano

$$[M] \oplus [N] := [M \oplus N].$$

Definición 2.5. Definimos el K_0 de un anillo R como el grupo de Grothendieck del monoide $(\mathcal{P}(R), \oplus)$

$$K_0(R) := G(\mathcal{P}(R), \oplus)$$

Sea $f : R \to R'$ un morfismo de anillos. Consideramos la siguiente estructura de R-módulo a derecha de R',

$$r' \cdot r := r' f(r).$$

Definimos el morfismo de monoides abeliano

$$\mathcal{P}(f) : \mathcal{P}(R) \to \mathcal{P}(R') \qquad \mathcal{P}(f)[M] = [R' \otimes_R M],$$

por propiedad universal del grupo de Grothendieck tenemos que existe un morfismo de grupos al cual llamamos $K_0(f) : K_0(R) \to K_0(R')$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}(R) \arrow[r, "\mathcal{P}(f)"] \arrow[d, "g"'] & \mathcal{P}(R') \arrow[d, "g'"] \\ K_0(R) \arrow[r, dashed, "K_0(f)"'] & K_0(R'). \end{tikzcd}$$

Observación 2.6. El grupo de clases proyectivas $K_0(R)$ es el grupo abeliano generado por las clases de isomorfismo $[P]$ de R-módulos proyectivos finitamente generados tal que para cada sucesión exacta corta

$$0 \to P_0 \to P_1 \to P_2 \to 0$$

de R-módulos proyectivos finitamente generados resulta que $[P_1] = [P_0] + [P_2]$.

Como R es un anillo con unidad, existe un único homomorfismo unital de anillos $j : \mathbb{Z} \to R$. Definimos el grupo reducido de clases proyectivas $\tilde{K}_0(R)$ al conúcleo de $K_0(j) : K_0(\mathbb{Z}) \to K_0(R)$. En otras palabras, $\tilde{K}_0(R)$ es el cociente de $K_0(R)$ por el subgrupo generado por las clases de R-módulos libres finitiamente generados. Un R-módulo proyectivo y finitamente generado P es establemente libre si existen $m, n \in \mathbb{N}$ tal que $P \oplus R^m \simeq R^n$ y esto sucede si y solamente si $[P] = 0$ en $\tilde{K}_0(R)$. Es así que $\tilde{K}_0(R)$ mide la desviación de P de ser un R-módulo establemente libre.

Observación 2.7. Se cumple que $\tilde{K}_0(R) = 0$, si R es algunos de los siguientes anillos,

- Un anillo con división, ver [13, Example 1.1.6].
- Un dominio de ideales principales, ver [13, Theorem 1.3.1].
- Un anillo local, ver [13, Theorem 1.3.11].

2.4. Complejos de cadenas de R-módulos. Sea R un anillo. Un complejo de cadenas de R-módulos $(C_\bullet, d)$ es una familia $\{C_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ de R-módulos junto con morfismos de R-módulos $d_k : C_k \to C_{k-1}$ tales que $d_{k-1} \circ d_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Un morfismo de complejos $\varphi : (C_\bullet, d) \to (\hat{C}_\bullet, \hat{d})$ es una familia de morfismos de R-módulos $\varphi_k : C_k \to \hat{C}_k$ tales que $\hat{d}_k \circ \varphi_k = \varphi_{k-1} \circ d_k$. Dos morfismos $\varphi, \tilde{\varphi} : (C_\bullet, d) \to (\hat{C}_\bullet, \hat{d})$ son homotópicos si existe una familia $s_k : C_k \to \hat{C}_{k+1}$ de morfismos de R-módulos tales que

$$\hat{d}_{k+1} \circ s_k + s_{k-1} \circ d_k = \varphi_k - \hat{\varphi}_k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Decimos que $s : C_\bullet \to \hat{C}_{\bullet+1}$ es una homotopía de cadenas. Dos complejos de cadenas $(C_\bullet, d)$ y $(\hat{C}_\bullet, \hat{d})$ son homotópicos si existen morfismos $\varphi : (C_\bullet, d) \to (\hat{C}_\bullet, \hat{d})$ y $\psi : (\hat{C}_\bullet, \hat{d}) \to (C_\bullet, d)$ tales que $\varphi \circ \psi$ y $\psi \circ \varphi$ son homotópicos a $\mathrm{id}_{\hat{C}_\bullet}$ e $\mathrm{id}_{C_\bullet}$

respectivamente. El complejo de cadenas $(C_\bullet, d)$ es contráctil si $\mathrm{id}_{C_\bullet}$ y el morfismo nulo son homotópicos.

Decimos que $(C_\bullet, d)$ es proyectivo si C_k es un R-módulo proyectivo para todo $k \in \mathbb{Z}$. Decimos que $(C_\bullet, d)$ es libre (con base) si C_k es un R-módulo libre (con una base distinguida) para todo $k \in \mathbb{Z}$. Si solamente hay una candidad finita de C_k no nulos decimos que $(C_\bullet, d)$ es acotado. El complejo $(C_\bullet, d)$ es de tipo finito si es acotado y cada C_k es finitamente generado.

Los grupos de homología de un complejo de cadenas $(C_\bullet, d)$ se definen de la siguiente manera

$$H_k(C_\bullet, d) = \mathrm{Ker}(d_k)/\,\mathrm{Im}(d_{k+1}) \qquad d_k : C_k \to C_{k+1}.$$

Ejercicio 2.8. *Probar que un complejo de cadenas $(C_\bullet, d)$ proyectivo y tal que $C_k = 0$ para $k < 0$, es contráctil si y solamente si $H_k(C_\bullet, d) = 0$ para todo $k \geq 0$.*

Si X es un espacio podemos considerar su complejo de cadenas singular asociado $C_*(X)$, ver [7]. Si X un CW-complejo, se puede considerar $C_*(X)$ como el complejo de cadenas tal que $C_n(X)$ es el grupo abeliano libre generado por las n-celdas, ver [7, Sec. 2.2] por más detalles.

2.5. Obstrucción de finitud de Wall. Si $(C_\bullet, d)$ es un complejo de cadenas proyectivo y de tipo finito tiene sentido considerar $[C_j] \in K_0(R)$ y $[C_j] \in \tilde{K}_0(R)$. La característica de Euler de $(C_\bullet, d)$ es

$$\chi((C_\bullet, d)) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} (-1)^j [C_j] \in K_0(R)$$

y la característica de Euler reducida de $(C_\bullet, d)$ es

$$\tilde{\chi}((C_\bullet, d)) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} (-1)^j [C_j] \in \tilde{K}_0(R)$$

Sea X un espacio conexo por caminos y localmente simplemente conexo y $C_*(X)$ su complejo de cadenas singular. Si $\tilde{X}$ es su revestimiento universal obtenemos que $C_*(X) = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} C_*(\tilde{X})$ en donde $G = \pi_1(X)$, ver [7, Sec 3.H].

Teorema 2.9. *(Wall,* [17],[18]*)*

1. *Sea X un espacio finitamente dominado, entonces $\pi_1(X)$ es finitamente presentado y $C_*(\tilde{X})$ es homotópico (como complejo de cadenas) a un complejo de tipo finito C_* de R-módulos proyectivos finitamente generados. La característica de Euler de X queda bien definida de la siguiente manera*

$$\tilde{\chi}(X) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} (-1)^j [C_j] \in \tilde{K}_0(RG).$$

   Además, $\tilde{\chi}(X) = 0$ si y solamente si X es homotópicamente equivalente a un CW-complejo finito.
2. *Sea G un grupo finitamente presentado. Todo elemento $\sigma \in \tilde{K}_0(RG)$ es la obstrucción finita de un CW-complejo finitamente dominado X con $\tilde{\chi}(X) = \sigma$ y $\pi_1(X) = G$.*
3. *Un CW-complejo X es finitamente dominado si y solamente si $G = \pi_1(X)$ es finitamente presentado y el complejo de cadenas de $\mathbb{Z}G$-módulos $C_*(\tilde{X})$ es homotópicamente equivalente a un complejo de cadenas $\mathcal{P}$ de tipo finito de $\mathbb{Z}G$-módulos proyectivos finitamente generados.*

Corolario 2.10. *Sea G un grupo finitamente presentado.*

Todo CW-complejo X finitamente dominado con $\pi_1(X) = G$ es homotópicamente equivalente a un CW-complejo finito. $\Leftrightarrow$ $\tilde{K}_0(RG) = 0$

Conjetura 2.11. *Si G es finitamente presentado y libre de torsión entonces*

$$\tilde{K}_0(\mathbb{Z}G) = 0$$

3. El grupo $K_1(R)$ y torsión de Whitehead

3.1. Homotopías simples. En esta sección nos vamos a detener en el problema de clasificación de equivalencias homotópicas entre CW-complejos finitos.

El par (D^n, S_+^{n-1}) tiene una estructura de CW-complejo relativo. El disco D^n se obtiene de S_+^{n-1} pegando el casco de abajo S_-^{n-1} que es una $n-1$-celda y rellenando con una n-celda. Sea X un CW-complejo y $q : S_+^{n-1} \to X$ un morfismo tal que $q(S^{n-2}) \subseteq X^{n-2}$ y $q(S_+^{n-1}) \subseteq X^{n-1}$. Sea $Y = D^n \cup_q X$ el espacio obtenido del siguiente diagrama de push out

$$\begin{tikzcd} S_+^{n-1} \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\iota"'] & X \arrow[d, "\alpha"] \\ D^n \arrow[r, "\beta"'] & Y \end{tikzcd}$$

El espacio Y se obtiene de X mediante el pegado de una celda de dimensión $n-1$ y otra de dimensión n y hereda una estructura de CW-complejo

$$Y^k = \alpha(X^k) \qquad k \leq n-2$$

$$Y^{n-1} = \alpha(X^{n-1}) \cup \beta(S^{n-1})$$

$$Y^k = \alpha(X^k) \cup \beta(D^n) \qquad k \geq n$$

El morfismo $\iota : S_+^{n-1} \to D^n$ es una equivalencia homotópica entonces $\alpha : X \to Y$ también. Decimos que α es una expansión elemental y que Y es obtenido de X por una expansión elemental. El morfismo $r : Y \to X$ con $r \circ \alpha = \mathrm{id}_X$ es único a menos de homotopías relativas a $\alpha(X)$, decimos que r es un colapso elemental y decimos que X es obtenido de Y via un colapso elemental.

Una equivalencia homotópica $f : X \to Y$ es simple si existe una sucesión de morfismos

$$X = X[0] \xrightarrow{f_0} X[1] \xrightarrow{f_1} X[2] \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} X[n] = Y$$

tal que f_i es una expasión o un colapso elemental y la compsosición de las f_i es un morfismo homotópico a f.

¿Cuándo una equivalencia homotópica es simple?

3.2. $K_1(R)$.

Definición 3.1. El grupo $K_1(R)$ está definido como el grupo abeliano cuyos generadores son las clases de conjugación $[f]$ de automorfismos $f : P \to P$ de R-módulos proyectivos finitamente generados y que satisfacen las siguientes relaciones:

- Para cada diagrama conmutativo de R-módulos proyectivos finitamente generados con filas exactas y columnas con automorfismos

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & P_0 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f_0"', "\cong"] & P_1 \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f_1"', "\cong"] & P_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"', "\cong"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & P_0 \arrow[r, "i"] & P_1 \arrow[r, "p"] & P_2 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

  tenemos que $[f_0] + [f_2] = [f_1]$.
- Si $f, g : P \to P$ son dos automorfismos de un mismo R-módulo proyectivo finitamente generado P entonces $[f \circ g] = [f] + [g]$.

Otra manera de definir $K_1(R)$ es la siguiente. Sea $GL_n(R)$ el grupo de matrices invertibles de $n \times n$ con coeficientes en R. Consideramos la inclusión $GL_n(R) \subset GL_{n+1}(R)$ como

$$A \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y al colímite de este sistema le llamamos $GL(R)$:

$$GL(R) = \operatorname{colim} GL_n(R) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} GL_n(R).$$

Se puede probar que, (ver [8, Theorem 5.14])

$$K_1(R) = GL(R)_{ab} = GL(R)/[GL(R), GL(R)].$$

Sea $j : \mathbb{Z} \to R$ el único morfismo de anillos unital. El grupo K_1 reducido $\tilde{K}_1(R)$ es el conúcleo del morfismo $j_* : K_1(\mathbb{Z}) \to K_1(R)$.

3.3. Torsion de Whitehead. En esta sección veremos la definición algebraica de la torsión de Whitehead presentada en [9].

Definición 3.2. Sea G un grupo. Sea $< \pm[g] : g \in G >$ el subgrupo de $K_1(\mathbb{Z}G)$ generado por las 1×1-matrices de la forma $(\pm g)$. El grupo de Whitehead de G es

$$Wh(G) = K_1(\mathbb{Z}G)/ < \pm[g] : g \in G > .$$

La torsión de Whitehead de una equivalencia homotópica $f : X \to Y$ de CW-complejos finitos y conexos es un elemento $\tau(f) \in Wh(\pi_1(X))$ y este elemento nos dirá si f es una homotopía simple. Empezaremos por definir la torsión de Whitehead para una equivalencia de homotopía de complejos de cadena.

Supongamos que $(C_\bullet, c)$ es un complejo de cadenas de R-módulos tal que $C_p = 0$ para $p < 0$. Sea $f_\bullet : (C_\bullet, c) \to (D_\bullet, d)$ un morfismo de complejo de cadenas. El mapping cylinder de $f_\bullet$, denotado por $\mathrm{cyl}_*(f_\bullet)$ es

$$\mathrm{cyl}_p(f_\bullet) = C_{p-1} \oplus C_p \oplus D_p \qquad \partial_p^{\mathrm{cyl}} = \begin{pmatrix} -c_{p-1} & 0 & 0 \\ -\mathrm{id} & c_p & 0 \\ f_{p-1} & 0 & d_p \end{pmatrix}$$

El mapping cone de $f_\bullet$, denotado por $\mathrm{cone}_*(f_\bullet)$, es el cociente de $\mathrm{cyl}_*(f_\bullet)$ por la copia de $C_\bullet$

$$\mathrm{cone}_p(f) = C_{p-1} \oplus D_p \qquad \partial_p^{\mathrm{cone}} = \begin{pmatrix} -c_{p-1} & 0 \\ f_{p-1} & d_p \end{pmatrix}$$

La suspensión de $C_\bullet$, denotada por $\sum C_\bullet$, es el cociente de $\mathrm{cone}_*(\mathrm{id}_{C_\bullet})$ por la copia de $C_\bullet$

$$(\textstyle\sum C_\bullet)_p = C_{p-1} \qquad \partial^{\Sigma} = -c_{p-1}$$

Proposición 3.3. *Un morfismo de complejo de cadenas $f : C_\bullet \to D_\bullet$ es una equivalencia homotópica si y solamente si* $\mathrm{cone}_\bullet(f)$ *es contráctil.*

Sea $\gamma_\bullet : \mathrm{cone}_\bullet(f) \to \mathrm{cone}_\bullet(f)$ una contracción, es decir, una homotopía entre el morfismo identidad y el morfismo nulo:
(3.4)

$$\gamma_n : \mathrm{cone}_n(f) \to \mathrm{cone}_{n-1}(f) \quad \gamma_n = \begin{pmatrix} h_{n-1} & g_n \\ l_{n-1} & k_n \end{pmatrix} : C_{n-1} \oplus D_n \to C_n \oplus D_{n+1}$$

tal que

$$\begin{tikzcd}
& C_{n-1} \oplus D_n \arrow[r, "\begin{pmatrix} -c_{n-1} & 0 \\ f_{n-1} & d_n \end{pmatrix}"] \arrow[dl, "\begin{pmatrix} h_{n-1} & g_n \\ l_{n-1} & k_n \end{pmatrix}"'] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & C_{n-1} \oplus D_{n-1} \arrow[dl, "\begin{pmatrix} h_{n-2} & g_{n-1} \\ l_{n-2} & k_{n-1} \end{pmatrix}"] \\
C_n \oplus D_{n+1} \arrow[r, "\begin{pmatrix} -c_n & 0 \\ f_n & d_{n+1} \end{pmatrix}"'] & C_{n-1} \oplus D_n &
\end{tikzcd}$$

entonces

$$-c_n h_{n-1} - h_{n-2} c_{n-1} + g_{n-1} f_{n-1} = \mathrm{id}_{C_{n-1}} \tag{3.5}$$

$$f_n g_n + d_{n+1} k_n + k_{n-1} d_n = \mathrm{id}_{D_n} \tag{3.6}$$

$$-c_n g_n + g_{n-1} d_n = 0 \tag{3.7}$$

De (3.7) obtenemos que los morfismos g_n forman un morfismo de complejo de cadenas, $g_\bullet : D_\bullet \to C_\bullet$. De (3.5) obtenemos que los morfismos $h_{n-1} : C_{n-1} \to C_n$ son una homotopía de cadenas de $g \circ f$ a id_C. De (3.6) obtenemos que los morfismos $k_n : D_n \to D_{n+1}$ forman una homotopía de cadenas de id_D a $f \circ g$.

Recíprocamente, dados g, h, k definimos γ como en (3.4) tomando $l = 0$. Luego γ es una homotopía de cadenas entre el siguiente morfismo

$$F_\bullet : \mathrm{cone}_\bullet(f) \to \mathrm{cone}_\bullet(f) \qquad F_n = \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{C_{n-1}} & 0 \\ f_n h_{n-1} + k_{n-1} f_{n-1} & \mathrm{id}_{D_n} \end{pmatrix}$$

y el morfismo nulo. Obtenemos la contracción de cadenas considerando $F^{-1} \circ \gamma$. $\square$

Proposición 3.8. *Sea $(C_\bullet, c)$ un complejo contráctil. Sean γ y $\tilde{\gamma}$ dos contracciones, entonces*

1. *Los siguientes son isomorfismos*

$$c + \gamma : C_{\mathrm{odd}} = \bigoplus_{i \geq 0} C_{2i+1} \to C_{\mathrm{even}} = \bigoplus_{i \geq 0} C_{2i} \quad c + \tilde{\gamma} : C_{\mathrm{even}} \to C_{\mathrm{odd}}$$

2. *Si $C_\bullet$ es proyectivo y de tipo finito, la composición*

$$(c + \tilde{\gamma}) \circ (c + \gamma) : C_{\mathrm{odd}} \to C_{\mathrm{odd}}$$

es un automorfismo de un R-módulo proyectivo finitamente generado cuya clase en $K_1(R)$ es cero.

Sea $\Delta_\bullet : C_\bullet \to C_{\bullet+2}$ el morfismo definido por $(\gamma - \tilde{\gamma}) \circ \gamma$. Consideremos el isomorfismo $f : C_{\text{even}} \to C_{\text{even}}$ definido por a siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} \text{id} & 0 & 0 & \dots \\ \Delta & \text{id} & 0 & \dots \\ 0 & \Delta & \text{id} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

La composición

$$g : C_{\text{odd}} \xrightarrow{c+\gamma} C_{\text{even}} \xrightarrow{f} C_{\text{even}} \xrightarrow{c+\tilde{\gamma}} C_{\text{odd}}$$

esta dada por la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} c & 0 & 0 & ... \\ \gamma & c & 0 & ... \\ 0 & \gamma & c & ... \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{id} & 0 & 0 & ... \\ \Delta & \text{id} & 0 & ... \\ 0 & \Delta & \text{id} & ... \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\gamma} & c & 0 & ... \\ 0 & \tilde{\gamma} & c & ... \\ 0 & 0 & \tilde{\gamma} & ... \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \dots \\ \beta & \alpha & 0 & \dots \\ \xi & \beta & \alpha & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

con $\alpha = \gamma c + c\Delta c + c\tilde{\gamma}$. Es fácil ver que

$$c\Delta - \Delta c = \tilde{\gamma} - \gamma$$

entonces

$$c\Delta c = \tilde{\gamma} c - \gamma c = \text{id} - c\tilde{\gamma} - \gamma c \quad \Rightarrow \quad \alpha = \text{id}\,.$$

Obviamente f y g representan a la clase nula en $K_1(R)$. □

Sea $(C_\bullet, c)$ un complejo de cadenas libre con base de tipo finito de R-módulos y contráctil. Por proposición 3.8,

$$c + \gamma : C_{\text{odd}} \to C_{\text{even}}$$

es un isomorfismo. Identificamos C_{odd} y C_{even} con R^n para algún $n \in \mathbb{N}$. Esta identificación esta determinada por la base distinguida. Entonces $[c+\gamma]$ representa un elemento en $K_1(R)$. Por proposición 3.8, si $\tilde{\gamma}$ es otra contracción de cadenas entonces $[c+\gamma] = -[c+\tilde{\gamma}]$. Definimos

$$\tau(C_\bullet) := [c+\gamma] \in \tilde{K}_1(R) = K_1(R)/\{\pm 1\}.$$

Esta definición depende de las bases distinguidas en cada R-módulo C_k pero no en la contracción elegida.

Sea $f_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$ una equivalencia de homotopía de complejos de cadenas libre, con base, de tipo finito de R-módulos. Observemos que cone$(f_\bullet)$ es un complejo de cadenas libre, con base, de tipo finito y contráctil. Definimos la torsión de Whitehead de $f_\bullet$ como

$$\tau(f_\bullet) = \tau(\text{cone}(f_\bullet)) \in \tilde{K}_1(R). \tag{3.9}$$

Supongamos ahora que $f : X \to Y$ es una equivalencia homotópica de CW-complejos conexos y finitos. Sea $p_X : \tilde{X} \to X$ y $p_Y : \tilde{Y} \to Y$ los revestimientos universales. Fijemos puntos base $\tilde{x} \in \tilde{X}$ e $\tilde{y} \in Y$ tales que si $p_X(\tilde{x}) = x$ y $p_Y(\tilde{y}) = y$ entonces $f(x) = y$. Sea $\tilde{f} : \tilde{X} \to \tilde{Y}$ el único levantado de f que satisface $\tilde{f}(\tilde{x}) = \tilde{y}$. Sea $G = \pi_1(X, x) = \pi_1(Y, y)$. Luego de tener fijados $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$ la acción de G en $\tilde{X}$ e $\tilde{Y}$ queda determinada. El morfismo $\tilde{f}$ es G-equivariante. Consideramos la equivalencia de homotopía entre $\mathbb{Z}G$-complejos de cadenas $C_\bullet(\tilde{f}) : C_*(\tilde{X}) \to C_*(\tilde{Y})$. Equipamos los $\mathbb{Z}G$-módulos $C_*(\tilde{X})$ y $C_*(\tilde{Y})$ con la bases que corresponden a las celdas. Usando (3.9) definimos

$$\tau(f) = \tau(C_\bullet(\tilde{f})) \in Wh(G)$$

Observar que estamos considerando la torsión en el cociente de $K_1(\mathbb{Z}G)$ por el subgrupo $< \pm[g] : g \in G >$, esto nos garantiza que la definición no depende de las bases elegidas.

Teorema 3.10. [4] *Sea $f : X \to Y$ una equivalencia homotópica de CW-complejos finitos. Entonces f es una equivalencia homotópica simple si y solamente si su torsión de Whitehead $\tau(f) \in Wh(\pi_1(Y))$ es nula.*

Conjetura 3.11. *Si G es finitamente presentado y libre de torsión entonces*

$$Wh(G) = 0$$

3.4. Teorema del s-cobordismo. Un cobordismo de dimensión n sobre M^- es $(W; M^-, f^-, M^+, f^+)$ en donde W es una variedad diferenciable compacta n-dimensional, junto con una descomposición de su borde ∂W en dos variedades cerradas $(n-1)$-dimensionales $\partial^- W$ y $\partial^+ W$, dos variedades cerradas $(n-1)$-dimensionales M^- y M^+ y difeomorfismos $f^- : M^- \to \partial^- W$ y $f^+ : M^+ \to \partial^+ W$. Un cobordismo es un h-cobordismo si las inclusiones $i^- : \partial^- W \to W$ y $i^+ : \partial^+ W \to W$ son equivalencias homotópicas.

Dos cobordismos $(W; M^-, f^-, M^+, f^+)$ y $(W'; M^-, f'^-, M'^+, f'^+)$ sobre M^- son difeomorfos relativos a M^- si existe un difeomorfismo $F : W \to W'$ tal que $F \circ f^- = f'^-$. Decimos que un cobordismo sobre M^- es trivial si es difeomorfo relativo a M^- al h-cobordismo trivial dado por el cilindro $M^- \times [0,1]$ junto con las inclusiones obvias de $M^- \times \{0\}$ y $M^+ \times \{1\}$.

¿Cuándo un h-cobordismo es trivial?.

La respuesta a la pregunta anterior esta facilitada por la torsión de Whitehead de un h-cobordismo $\tau(M^-, W)$. En dicho caso, la torsión de Whitehead está bien definida y se realiza considerando una estructura de CW-complejo de la variedad, ver [8, Sec. 6.3].

Teorema 3.12 (Teorema del s-cobordismo)**.** *Sea M^- una variadad diferenciable cerrada, orientada y conexa de dimensión ≥ 5 con grupo fundamental $G = \pi_1(M^-)$. Entonces*

i) *Un h-cobordismo W sobre M^- es trivial si y solamente si $\tau(W, M^-) \in Wh(G)$ se anula.*
ii) *Las clases de difeomorfismos relativas a M^- de h-cobordismos sobre M^- estan en biyección con los elementos de $Wh(G)$ via la torsión de Whitehead.*

Corolario 3.13. *Sea G un grupo finitamente presentado.*

Todo h-cobordismo sobre una variedad cerrada y conexa M^- con $\dim(M^-) \geq 5$ y $\pi_1(M^-) = G$ es trivial. $\Leftrightarrow$ $Wh(G) = 0$

4. Conjetura de Farrell-Jones

Las conjeturas de isomorfismo tienen como objetivo facilitar el cálculo de ciertos invariantes. Hemos visto el interés que hay en calcular $\tilde{K}_0(\mathbb{Z}G)$ y $Wh(G)$ y hemos formulado las conjeturas 2.11 y 3.11. La conjetura de Farrell-Jones tiene como objetivo calcular $K_n(RG)$ y la veracidad de dicha conjetura implica otras conjeturas más conocidas como la conjetura de Poincaré y la conjetura de Borel. Para una exposición completa ver el artículo [10].

4.1. Conjetura de Farrell-Jones: caso K_n, $n = 0, 1$. Sea R un anillo y G un grupo. Denotamos por

$$A_0 = K_0(i) : K_0(R) \to K_0(RG)$$

el morfismo inducido por la inclusión $i : R \to RG$. Sea G_{ab} el grupo abelianizado de G. Definimos $\phi : G_{ab} \otimes K_0(R) \to K_1(RG)$ el morfismo inducido por la aplicación que manda un elemento $(g, [P]) \in G \times K_0(R)$ a la siguiente clase de RG-automorfismo

$$R[G] \otimes_R P \to R[G] \otimes_R P, \qquad u \otimes x \mapsto ug^{-1} \otimes x$$

Definimos

$$A_1 = \phi \oplus K_1(i) : G_{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} K_0(R) \oplus K_1(R) \to K_1(RG)$$

Un anillo R es Noetheriano si todo submódulo de un R-módulo finitamente generado es también finitamente generado. Decimos que R es regular si es Noetheriano y todo R-módulo tiene una resolución proyectiva de dimensión finita.

Conjetura 4.1. *Sea R un anillo regular y G un grupo libre de torsión entonces los siguientes son isomorfismos*

$$K_0(R) \xrightarrow{A_0} K_0(RG) \qquad G_{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} K_0(R) \oplus K_1(R) \xrightarrow{A_1} K_1(RG)$$

Observemos que si $R = \mathbb{Z}$ entonces la conjetura 4.1, es exactamente la unión de las conjeturas 2.11 y 3.11.

4.2. Conjetura de Farrell-Jones: caso libre de torsión. Enunciaremos la conjetura para todas las dimensiones. El objetivo es calcular $K_n(RG)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Los grupos K_n con $n < 0$ se llaman grupos de K-teoría negativa y la definición se puede consultar en [13]. Los grupos K_n con $n \geq 1$ son los grupos de K-teoría superior y la definición de Quillen se puede ver en [12], [19]. Denotaremos por $\mathbf{K}_R$ al espectro de K-teoría no conectivo de R que verifica

$$\pi_n(\mathbf{K}_R) = K_n(R) \qquad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Para ver la definición de dicho espectro consultar [11]. La conjetura de Farrell-Jones consiste en relacionar $K_n(RG)$ con el grupo de homología del espacio clasificante BG con coeficientes en el espectro $\mathbf{K}_R$, que notamos por $H_n(BG; \mathbf{K}_R)$. El espacio clasificante de un grupo G, es un CW-complejo BG tal que $\pi_1(BG) \cong G$ cuyo revestimiento universal es contráctil. Esta propiedad caracteriza a BG a menos de equivalencias homotópicas.

Conjetura 4.2. *Sea G un grupo libre de torsión y R un anillo regular. Entonces existe un morfismo, llamado morfismo de asemblaje,*

$$H_n(BG; \mathbf{K}_R) \to K_n(RG)$$

que es un isomorfismo para todo $n \in \mathbb{Z}$.

4.3. Conjetura de Farrell-Jones: caso general. Supongamos que tenemos:

- Un grupo discreto G.
- Una familia $\mathcal{F}$ de subgrupos de G, es decir, un conjunto de subgrupos de G que es cerrado por conjugación y por intersecciones finitas.
- Una teoría de G-homología, $\mathcal{H}_*^G(-)$.

El espacio clasificante de G para la familia $\mathcal{F}$ es un G-CW-complejo $E_{\mathcal{F}}G$ tal que $(E_{\mathcal{F}}(G))^H$, la parte fija de $E_{\mathcal{F}}G$ por un subrgupo H de G, es un conjunto vacío si $H \notin \mathcal{F}$ y es un espacio contráctil si $H \in \mathcal{F}$. Este espacio queda unicamente determinado a menos de G-homotopías. El morfismo de asemblaje asociado a $(G, \mathcal{F}, \mathcal{H}_*^G(-))$ es la imagen de la proyección $E_{\mathcal{F}} \to pt$ por la teoría de homología

$$\mathcal{A}_{\mathcal{F}} : \mathcal{H}_*^G(E_{\mathcal{F}}G) \to \mathcal{H}_*^G(pt).$$

Sea R es un anillo, consideramos la una G-teoría de homología $H_*^G(-; \mathbf{K}_R)$ definida en [6] que verifica que $H_*^G(pt; \mathbf{KR}) = K_*(RG)$. Un grupo es virtualmente cíclico si contiene un subgrupo cíclico de indice finito. Denotemos por Vyc a la familia de subgrupos cíclicos de G.

Conjetura 4.3. *Sea R un anillo y G un grupo, el morfismo de asemblaje*

$$\mathcal{A}_{Vyc} : H_n^G(E_{Vyc}G; \mathbf{K}_R) \to H_n^G(pt; \mathbf{K}_R) = K_n(RG)$$

es un isomorfismo para todo $n \in \mathbb{Z}$

4.4. Relación con otras conjeturas. Las siguientes conjeturas pueden ser probadas usando la conjetura de Farrell-Jones

Conjetura 4.4 (Conjetura de Poincaré)**.** *Supongamos que $n \geq 5$. Si M es una variedad diferenciable cerrada homotópicamente equivalente a S^n, entonces es homeomorfa a S^n*

Decimos que una variedad diferenciable o un CW-complejo es aesférico si su revestimiento universal es contráctil.

Conjetura 4.5 (Conjetura de Borel)**.** *Sea $f : M \to N$ una equivalencia de homotopía entre variedades topológicas cerradas, entonces f es homotópico a un homeomorfismo. En particular, dos variedades cerradas y aesféricas con grupos fundamentales isomorfos son homeomorfas.*

Conjetura 4.6 (Conjetura de idempotencia)**.** *Sea R un dominio de integridad y G un grupo libre de torsión. Los únicos idempotentes en RG son 0 y 1.*

H. Apéndice: Propiedades de K_0 y K_1

En esta sección enunciaremos algunas de las propiedades de los funtores K_0 y K_1. Para más detalles se puede consultar los dos primeros capítulos de [13]. Denotemos por **PRng** a la categoría de anillos sin unidad y por **Ring** a la subcategoría plena de **PRng** formada por los anillos con unidad.

- **Aditividad.** Sean R_1 y R_2 anillos con unidad. Consideramos $R = R_1 \times R_2$ y $p_i : R \to R_i$ las proyecciones correspondientes. Se verifica que el morfismo

$$K_i(R) \to K_i(R_1) \oplus K_i(R_2) \qquad i = 0, 1$$

  es un isomorfismo.

- **Extensión a anillos sin unidad.** Podemos extender la definición de los funtores K_0 y K_1 a la categoría **PRng** de anillos sin unidad. Sea A un anillo (no necesariamente con unidad); consideramos
$$\varphi_A : \tilde{A} \to \mathbb{Z} \qquad \varphi(a,n) = n.$$
Definimos
$$K_i(A) := \ker(K_i(\varphi_A)) \subseteq K_i(\tilde{A}) \qquad i = 0, 1.$$
Sea $f : A \to B$ un morfismo de anillos, definimos $K_i(f)$ $i = 0, 1$ de manera tal que el siguiente diagrama conmuta
$$\begin{tikzcd} K_i(A) \arrow[rr, dashed, "K_i(f)"] \arrow[d, hook] & & K_i(B) \arrow[d, hook] \\ K_i(\tilde{A}) \arrow[rr, "K_i(\tilde{f})"] \arrow[dr, "K_i(\varphi_A)"'] & & K_i(\tilde{B}) \arrow[dl, "K_i(\varphi_B)"] \\ & K_i(\mathbb{Z}) & \end{tikzcd}$$
Si A tiene unidad, ésta definición coincide con las realizadas para anillos con unidad. En efecto, consideramos el isomorfismo $\psi : \tilde{A} \to A \times \mathbb{Z}$
$$\psi : A \times \mathbb{Z} \to \tilde{A} \qquad \psi(a,n) = (a + n \cdot 1_A, n).$$
Por aditividad $K_i(\tilde{A}) \cong K_i(A) \oplus K_i(\mathbb{Z})$. Luego $\ker(K_i(\varphi_A)) = K_i(A)$.
- $\mathcal{M}_p$ **estabilidad.** Sea K_i : **Ring** $\to$ **Ab**. Denotemos por $\operatorname{diag}(r_1, \ldots, r_p)$ a la matriz diagonal de $\mathcal{M}_p(R)$ cuyas entradas en la diagonal son $r_1, \ldots, r_p$. La imagen por K_i del morfismo
$$r \mapsto \operatorname{diag}(r, 0, \ldots, 0)$$
es un isomorfismo. Luego si R es un anillo con unidad,
$$K_i(R) \cong K_i(\mathcal{M}_p(R)).$$
- **Continuidad.** Los funtores K_i : **PRng** $\to$ **Ab** preservan colímites de sistemas filtrantes. Es decir el morfismo canónico
$$\operatorname{colim}_j K_i(A_j) \to K_i(\operatorname{colim}_j(A_j))$$
es un isomorfismo.
- $\mathcal{M}_\infty$**-estabilidad.** Combinando la continuidad y la $\mathcal{M}_p$-estabilidad del funtor K_i : **PRng** $\to$ **Ab**, obtenemos que si R es un anillo con unidad
$$K_i(\mathcal{M}_\infty(R)) \cong K_n(R).$$
- K_0 **es nilinvariante.** Consideramos K_0 : **Ring** $\to$ **Ab**. Si $I \triangleleft R$ es un ideal nilpotente, entonces $K_0(R) \to K_0(R/I)$ es un isomorfismo. El funtor K_1 no tiene esta propiedad, ver ejemplo 1.3.1 en [5].
- **Semi-Exactitud.** Varios ejemplos muestran que funtores K_i : **PRng** $\to$ **Ab** no son exactos. Sin embargo, son semi-exactos: Si

(H.1) $$0 \to A \to B \to C \to 0$$

es una sucesión exacta de anillos, entonces

(H.2) $$K_i(A) \to K_i(B) \to K_i(C)$$

es exacta. Además si (H.1) se parte, entonces

$$0 \to K_0(A) \to K_0(B) \to K_0(C) \to 0$$

es una sucesión exacta que se parte. Esta última propiedad no es verficada por K_1, ver contraejemplo en [15].

- **Sucesión exacta.** La razón por la cual se consideran a los funtores K_0 y K_1 como parte de una misma teoría, es porque podemos conectar ambas sucesiones de (H.2), formando así una sucesión exacta de seis términos. En efecto, existe $\partial : K_1(C) \to K_0(A)$ tal que

$$K_1(A) \to K_1(B) \to K_1(C) \xrightarrow{\partial} K_0(A) \to K_0(B) \to K_0(C) \tag{H.3}$$

es exacta.

Referencias

[1] A. Bartels, On proofs of the Farrell-Jones conjecture. `http://arxiv.org/abs/1210.1044v2`, *2013*

[2] A. Bartels and W. Lück, The Borel conjecture for hyperbolic and CAT(0)-groups. *Ann. of Math. (2) 175 (2012), no. 2, 631–689.*

[3] A. Bartels; W. Lück and H. Reich, The K-theoretic Farrell-Jones conjecture for hyperbolic groups. Invent. Math. 172 (2008), no. 1, 29–70.

[4] M. M. Cohen, A course in simply-homotopy theory *Springer-Verlag, New York, 1973. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 10.*

[5] G. Cortiñas, Algebraic v. topological K-theory: a friendly match. *Topics in algebraic and topological K-theory, 103–165, Lecture Notes in Math., 2008, Springer, Berlin, 2011.*

[6] J. Davis and W. Lück. Spaces over a category and assembly maps in isomorphism conjectures in K- and L-theory. *K-theory*, 15:241–291, 1998.

[7] A. Hatcher, Algebraic Topology `http://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf`

[8] M. Kreck and W. Lück, The Novikov conjecture. *Geometry and algebra. Oberwolfach Seminars, 33. Birkhäuser Verlag, Basel, 2005.*

[9] W. Lück, Transformation groups and algebraic K-theory. *Lecture Notes in Mathematics, 1408. Mathematica Gottingensis. Springer-Verlag, Berlin, 1989.*

[10] W. Lück and H. Reich, The Baum-Connes and the Farrell-Jones conjectures in K- and L-theory. *Handbook of K-theory. Vol. 1, 2, 703–842, Springer, Berlin, 2005.*

[11] E. Pedersen, C. Weibel. A nonconnective delooping of algebraic K-theory. Algebraic and geometric topology (New Brunswick, N.J., 1983) 166–181, *Lecture Notes in Math., 1126, Springer, Berlin, 1985.*

[12] D. Quillen, Higher algebraic K-theory I *In Algebraic K-theory, I: Higher K-theories (Proc. Conf., Battelle Memorial Inst., Seattle, Wash., 1972), pages 85–147. Lectures Notes in Math., Vol 341. Springer-Verlag, Berlin, 1973.*

[13] J. Rosenberg. Algebraic K-theory and its applications. *Graduate texts in Mathematics, 147. Springer-Verlag, New York, 1994.*

[14] J. Rosenberg. K-theory and Geometric Topology. *Handbook of K-theory. Vol. 1, 2, 577–610, Springer, Berlin, 2005.*

[15] A. Swan Excision in algebraic K-theory J. Pure Appl. Algebra, 1:221–252, 1971.

[16] R. M. Switzer Algebraic topology - homology and homotopy. Reprint of the 1975 edition. Classics in Mathematics. Berlin. Springer. xii, 526, 2002.

[17] C.T.C. Wall, Finiteness condition for CW-complex. Ann. of Math. 81 (1965), 56–69.

[18] C.T.C. Wall, Finiteness condition for CW-complex II. Proc. Roy. Soc. Ser. A, 295:129–139, 1966

[19] C. A. Weibel, The K-book. An introduction to algebraic K-theory. Graduate Studies in Mathematics, 145. American Mathematical Society, Providence, RI, 2013

IMERL, Facultad de Ingeniería, Universidad de la República
Julio Herrera y Reissig 565, 11.300, Montevideo, Uruguay
E-mail address: `eellis@fing.edu.uy`