Publicaciones Matemáticas del Uruguay
Volumen 17, Julio 2019, Páginas 25–39
S 0797-1443

INTRODUCCIÓN A LAS ÁLGEBRAS DE LIE

ANA GONZÁLEZ

Introducción

Estas notas corresponden al mini-curso "Introducción a las álgebras de Lie" del 6to Coloquio Uruguayo de Matemática. El curso consiste en una rápida introducción a las álgebras de Lie, presentando los conceptos necesarios para realizar la clasificación de las mismas en dimensiones bajas. La determinación de listas completas de álgebras de Lie es un problema cuya complejidad aumenta a medida que se incrementa la dimensión del álgebra. Por ejemplo, la clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes es un problema abierto que ha sido tratado por diversos autores.

La teoría de Lie tiene múltiples aplicaciones a otras ciencias, tales como Física, Ingeniería, Economía y Finanzas. Por ejemplo, en Física, los grupos y las álgebras de Lie son muy utilizados como herramientas en el estudio de las simetrías, no sólo de las clásicas en el espacio-tiempo, sino también en la teoría de super-cuerdas.

A continuación detallaremos como será organizado el curso. Comenzaremos construyendo la categoría de álgebras de Lie: (álgebras de Lie y los morfismos entre ellas). Luego veremos una serie de ejemplos que nos permitirán familiarizarnos con estos conceptos. Continuaremos con costrucciones algebraicas que serán de utilidad para la clasificación en dimensiones bajas y finalizaremos presentando la lista completa de álgebras de Lie de dimensión 1, 2 y 3. Para culminar daremos un breve recorrido por algunos problemas en economía y finanzas que usan teoría de Lie y desarrollaremos uno de estos ejemplos para familiarizar al lector con estas aplicaciones.

El objetivo de este curso es motivacional. Por lo cual será muy incompleto y se omitirán algunas de las demostraciones. Para cubrir esto se incluyen varias referencias, que ayudan a profundizar las ideas que acá se presentan.

1. Conceptos básicos

En esta sección desarrollaremos los conceptos básicos de la teoría de álgebras de Lie. Conceptos y los resultados necesarios para comprender la clasificación que se realiza en la sección 2 y el ejemplo desarrollado en la sección 3.

Definición 1. *Sea $\Bbbk$ un cuerpo. Decimos que L es un* álgebra de Lie *sobre $\Bbbk$ si es un $\Bbbk$-espacio vectorial y admite un producto (bilineal), llamado corchete de Lie*

$$\begin{array}{rccc} [\,,\,]: & L\times L & \to & L \\ & (x,y) & \mapsto & [x,y] \end{array}$$

Que satisface las siguientes propiedades

1. $[x,x]=0$, $\forall x\in L$.

2. $[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0$, $\forall x,y\in L$. *Esta propiedad se conoce como* condición de Jacobi.

Un álgebra de Lie se dice abeliana *si* $\forall x,y\in L$ *se tiene que el corchete de Lie*

$$[x,y]=0.$$

Observación 2.

$$0=[x+y,x+y]=[x,x]+[x,y]+[y,x]+[y,y]=[x,y]+[y,x]\Rightarrow [x,y]=-[y,x].$$

Entonces, la propiedad (1) puede sustituirse por la siguiente propiedad:
(1') $[x,y]=-[y,x]$, $\forall x,y\in L$.

Observación 3. Supongamos que el álgebra es de dimensión finita y consideremos $B=\{e_1,\ldots,e_n\}$ una base de la misma (como espacio vectorial sobre $\Bbbk$), por lo cual todo elemento $x\in L$ puede escribirse como

$$x=\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i,\quad \xi_i\in\Bbbk.$$

Para probar que un espacio vectorial es un álgebra de Lie basta verificar que los elementos de la base satisfacen las condiciones de Lie.
Veamos sólo la condición (1). La condición (2) se prueba de forma similar pero los cálculos son más extensos.

$$[x,x]=\left[\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i,\sum_{j=1}^{n}\xi_j e_j\right]=\sum_{i,j=1}^{n}\xi_i\xi_j\left[e_i,e_j\right]=0$$
$$\Rightarrow [x,x]=0,\ \forall x\in L.$$

Definición 4 (**Estructura constante**). *Si L es un álgebra de Lie sobre $\Bbbk$ con base $\mathcal{B}=\{e_1,\ldots,e_n\}$ entonces $[\,,\,]$ queda completamente determinado si conocemos los productos $[e_i,e_j]$.*
Definamos escalares $a_{ij}^k\in\Bbbk$ tales que

$$[e_i,e_j]=\sum_{k=1}^{n}a_{ij}^k e_k.$$

Estos escalares se llaman estructura constante *de L con respecto a la base $\mathcal{B}$. Diferentes bases pueden dar, en general, diferentes estructuras constantes.*

Por las propiedades (1) y (1') es suficiente conocer la estructura constante a_{ij}^k, $1\le i<j\le n$ para tener determinada la estructura de Lie sobre L.

Ejemplo 1.1. *Consideremos el cuerpo de los reales $\mathbb{R}$ y el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$. Observemos que el producto vectorial*

$$\begin{array}{rccc}\wedge: & \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3\\ & (x,y) & \mapsto & x\wedge y\end{array}$$

define una estructura de Lie sobre $\mathbb{R}^3$.

Recordemos que $(x_1,x_2,x_3)\wedge(y_1,y_2,y_3)=(x_2y_3-x_3y_2,x_3y_1-x_1y_3,x_1y_2-x_2y_1)$. Sabemos que $\wedge$ es una función bilineal. Veamos que verifica las condiciones de Lie.

(a) $x\wedge x=(x_2x_3-x_3x_2,x_3x_1-x_1x_3,x_1x_2-x_2x_1)=(0,0,0)$, *para todo* $x\in\mathbb{R}^3$.

(b) *Condición de Jacobi:*

$[x,[y,z]] = x \wedge (y \wedge z) = \big(x_2y_1z_2 - x_2y_2z_1 - x_3y_3z_1 + x_3y_1z_3, x_3y_2z_3 - x_3y_3z_2 - x_1y_1z_2 + x_1y_2z_1, x_1y_3z_1 - x_1y_1z_3 - x_2y_2z_3 + x_2y_3z_2\big)$

$[y,[z,x]] = y \wedge (z \wedge x) = \big(y_2z_1x_2 - y_2z_2x_1 - y_3z_3x_1 + y_3z_1x_3, y_3z_2x_3 - y_3z_3x_2 - y_1z_1x_2 + y_1z_2x_1, y_1z_3x_1 - y_1z_1x_3 - y_2z_2x_3 + y_2z_3x_2\big)$

$[z,[x,y]] = z \wedge (x \wedge y) = \big(z_2x_1y_2 - z_2x_2y_1 - z_3x_3y_1 + z_3x_1y_3, z_3x_2y_3 - z_3x_3y_2 - z_1x_1y_2 + z_1x_2y_1, z_1x_3y_1 - z_1x_1y_3 - z_2x_2y_3 + z_2x_3y_2\big)$

Sumando obtenemos que

$$[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0.$$

Ejemplo 1.2. *Cualquier espacio vectorial V tiene un corchete de Lie dado por*

$$[x,y] = 0, \quad \forall x, y \in V.$$

Esta es una estructura de Lie abeliana sobre V.
En particular el cuerpo puede considerarse como un álgebra de Lie de dimensión 1 con este corchete.

Ejemplo 1.3. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\Bbbk$. Denotamos por $\mathrm{gl}(V)$ el conjunto de todas las transformaciones lineales de V en V. Este es de nuevo un espacio vectorial sobre $\Bbbk$ y podemos definir un corchete que le de estructura de álgebra de Lie de la siguiente forma:*

$$\begin{array}{cccc} [\,,\,]: & \mathrm{gl}(V) \times \mathrm{gl}(V) & \to & \mathrm{gl}(V) \\ & (T,S) & \mapsto & T \circ S - S \circ T \end{array}$$

Es claro que la composición de transformaciones lineales es una operación bilineal. Veamos las condiciones de Lie.

$$[T,T] = TT - TT = 0,$$

$$[T,[S,U]] + [S,[U,T]] + [U,[T,S]]$$
$$=$$
$$T(SU-US)-(SU-US)T+S(UT-TU)-(UT-TU)S+U(TS-ST)-(TS-ST)U$$
$$=$$
$$TSU-TUS-SUT+UST+SUT-STU-UTS+TUS+UTS-UST-TSU+STU$$
$$= 0.$$

Ejemplo 1.4. *Consideremos el espacio vectorial $\mathrm{gl}(n,\Bbbk)$ de las matrices cuadradas sobre $\Bbbk$. En este espacio vectorial también podemos definir un corchete de Lie dado por:*

$$\begin{array}{cccc} [\,,\,]: & \mathrm{gl}(n,\Bbbk) \times \mathrm{gl}(n,\Bbbk) & \to & \mathrm{gl}(n,\Bbbk). \\ & (M,N) & \mapsto & MN - NM \end{array}$$

Una forma de probar que es un álgebra de Lie es considerar la base canónica de las matrices $\big\{E_{ij}, 1 \le i,j \le n\big\}$ y verificar (1) y (2) sobre estas matrices. Para ello basta observar que

$$\big[E_{ij}, E_{kl}\big] = \delta_{jk}E_{il} - \delta_{il}E_{kj}.$$

Ejemplo 1.5. *Sea* $\mathrm{sl}(n,\Bbbk)$ *el subespacio de* $\mathrm{gl}(n,\Bbbk)$ *de todas las matrices de traza cero. Para matrices cuadradas arbitrarias* M, N*, la matriz* $MN - NM$ *tiene traza* 0*, así* $[M,N] = MN - NM$*, define una estructura de Lie sobre* $\mathrm{sl}(n,\Bbbk)$*. Esta álgebra de Lie es conocida como* álgebra lineal especial*.*

Ejemplo 1.6. *Sea* $\mathrm{b}(n,\Bbbk)$ *el conjunto de las matrices triangulares superiores en* $\mathrm{gl}(n,\Bbbk)$*. Esta es un álgebra de Lie con el mismo corchete de Lie de* $\mathrm{gl}(n,\Bbbk)$*. Similarmente,* $\mathrm{n}(n,\Bbbk)$ *el conjunto de matrices estríctamente triangulares superiores en* $\mathrm{gl}(n,\Bbbk)$ *es un álgebra de Lie con el mismo corchete que* $\mathrm{gl}(n,\Bbbk)$*.*

1.1. Elementos de la Teoría de álgebras de Lie.

Los dos ejemplos presentados anteriormente sugieren la existencia de la noción de subálgebra de Lie. Veamos a continuación la definición.

Definición 5. *Sea* L *un álgebra de Lie, decimos que* S *es una* subálgebra de Lie *de* L *si es un subespacio vectorial* $S \subset L$ *tal que*

$$[x,y] \in S, \quad \forall x, y \in S.$$

Definición 6. *Un* ideal I *de un álgebra de Lie* L *es un subespacio de* L *tal que:*

$$[x,y] \in I, \quad \forall x \in L, y \in I.$$

Observación 7. Por la condición (1'), $[x,y] = -[y,x]$, así que no necesitamos distinguir entre ideales a izquierda o a derecha. Por ejemplo $\mathrm{sl}(n,\Bbbk)$ es un ideal de $\mathrm{gl}(n,\Bbbk)$ y $\mathrm{n}(n,\Bbbk)$ es un ideal de $\mathrm{b}(n,\Bbbk)$.

Un ideal siempre es una subálgebra. Pero, una subálgebra no necesariamente es un ideal. Por ejemplo $\mathrm{b}(n,\Bbbk)$ es una subálgebra de $\mathrm{gl}(n,\Bbbk)$, pero si $n > 2$, no es un ideal. Para ver esto notar que $E_{11} \in \mathrm{b}(n,\Bbbk)$ y $E_{21} \in \mathrm{gl}(n,\Bbbk)$ y

$$[E_{21}, E_{11}] = E_{21} \notin \mathrm{b}(n,\Bbbk).$$

Un álgebra de Lie es por sí misma un ideal de L, porque $\forall x, y \in L$ se tiene que $[x,y] \in L$. Así como también $\{0\}$ es un ideal de L, a estos ideales se los llama *ideales triviales* de L.

Un ejemplo importante de un ideal no-trivial es el centro de L, el cual definimos como sigue:

Definición 8. *Se define el* centro *de un álgebra de Lie como:*

$$Z(L) = \{x \in L : \ [x,y] = 0 \, \forall y \in L\}.$$

Teorema 9. *Sea* L *un álgebra de Lie y* $Z(L)$ *su centro. Entonces*

$$L = Z(L) \Leftrightarrow L \text{ es abeliana.}$$

Demostración. Si $L = Z(L) \Rightarrow [x,y] = 0, \forall x, y \in L$ lo cual prueba que L es abeliana. Recíprocamente, si L es abeliana entonces $[x,y] = 0$ para todo $x, y \in L$, por lo tanto $x \in Z(L)$ para todo $x \in L$. Es decir, $L = Z(L)$. □

Definición 10 (**Homomorfismos entre álgebras de Lie**)**.** *Sean* L_1 *y* L_2 *dos álgebras de Lie sobre el mismo cuerpo* $\Bbbk$*, se dice que una función* $\varphi : L_1 \to L_2$ *es un* homomorfismo de Lie *si* φ *es una transformación lineal tal que*

$$\varphi\big([x,y]\big) = \big[\varphi(x), \varphi(y)\big], \quad \forall x, y \in L_1.$$

Decimos que φ *es un* isomorfismo *si* φ *es además biyectiva.*

Un homomorfismo importante en la categoría de álgebras de Lie es el siguiente.

Definición 11 (**Homomorfismo adjunto**). *Si L es un álgebra de Lie el* homomorfismo adjunto *se define como:*

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{ad}: & L & \to & \mathrm{gl}(L) \\ & x & \mapsto & \mathrm{ad}(x): \quad L \to L \\ & & & \qquad\qquad y \mapsto [x,y] \end{array}$$

Observar que ad es una transformación lineal. Es un homomorfismo de Lie ya que:

$$\mathrm{ad}\big([x,y]\big) = \big[\mathrm{ad}(x), \mathrm{ad}(y)\big] = \mathrm{ad}(x)\circ\mathrm{ad}(y) - \mathrm{ad}(y)\circ\mathrm{ad}(x).$$

$$\begin{aligned} \big(\mathrm{ad}\big([x,y]\big)\big)(z) &= [[x,y],z] = -[z,[x,y]] \\ &= [x,[y,z]] + [y,[z,x]] \\ &= \mathrm{ad}(x)([y,z]) + \mathrm{ad}(y)([z,x]) \\ &= \mathrm{ad}(x)\big(\mathrm{ad}(y)(z)\big) + \mathrm{ad}(y)\big(-\mathrm{ad}(x)(z)\big) \\ &= \big[\mathrm{ad}(x), \mathrm{ad}(y)\big](z). \end{aligned}$$

Teorema 12. *Sean L_1 y L_2 dos álgebras de Lie abelianas. L_1 y L_2 son isomorfas si y sólo si tienen la misma dimensión.*

Demostración. Si son isomorfas, en particular son isomorfas como espacios vectoriales, entonces tienen la misma dimensión.
Recíprocamente, si tienen la misma dimensión son isomorfas como espacios vectoriales. Además, como son abelianas $[x,y]=0$, $\forall x,y \in L_1$ y $[x',y']=0$, $\forall x',y' \in L_2$, entonces el isomorfismo preserva las estructuras de Lie. Es decir, es un isomorfismo de álgebras de Lie. □

Definición 13 (**Álgebra derivada**). *Sea L un álgebra de Lie, definimos el* álgebra derivada *de L, como la subálgebra $L' = [L,L]$. Es decir:*

$$L' = \mathrm{span}\big\{[x,y] : x,y \in L\big\} = \Big\{t = \sum c_i[x_i,y_i] : x_i, y_i \in L, c_i \in \mathbb{k}\Big\}.$$

Ejemplo 1.7. *Sea L el álgebra de matrices de la forma*

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{C} \right\}$$

Si $M = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ entonces $[M,N] = MN - NM = 0$. Por lo tanto $L' = \{0\}$.

Definición 14 (**Álgebra de Lie cociente**). *Si I es un ideal de un álgebra de Lie L, entonces es en particular un subespacio de L, así el espacio cociente L/I se puede dotar de una estructura de álgebra de Lie de manera natural definiendo*

$$[w+I, z+I] = [w,z] + I, \quad \forall w,z \in L.$$

Teorema 15 (**Teoremas de isomorfismos**).

(a) *Sea $\varphi : L_1 \to L_2$ un homomorfismo de álgebras de Lie. Entonces, $N(\varphi)$ es un ideal de L_1, $Im(\varphi)$ es una subálgebra de L_2 y*

$$L_1/N(\varphi) \cong Im(\varphi).$$

(b) *Si I y J son ideales de un álgebra de Lie L tales que $I \subset J$. Entonces J/I es un ideal de L/I y*

$$(L/I)/(J/I) \cong L/J.$$

1.2. Álgebras de Lie resolubles.

Definición 16 (Serie de derivadas). *Se define la* serie de derivadas *de L como la serie*

$$L \supseteq L^{(1)} \supseteq L^{(2)} \supseteq \cdots$$

donde

$$L^{(1)} = L' \text{ y } L^{(k)} = \left[L^{(k-1)}, L^{(k-1)}\right] \; k \geq 2.$$

Ejemplo 1.8 (Álgebra de Heisenberg). *El álgebra de Heisenberg $\mathcal{H}_n$ es el álgebra de Lie real de dimensión $2n+1$ que tiene por base los elementos:*

$$\left\{P_1, \ldots, P_n, Q_1, \ldots, Q_n, C\right\}$$

y el corchete de Lie definido por

$$\left[P_i, P_j\right] = \left[Q_i, Q_j\right] = \left[P_i, C\right] = \left[Q_i, C\right] = [C, C] = 0, \quad \left[P_i, Q_j\right] = C.$$

Estudiemos el caso particular de $n = 1$: consideremos la base $\left\{P, Q, C\right\}$ dada por

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces una forma de definir la forma matricial de los elementos del álgebra es:

$$pP + qQ + cC = \begin{pmatrix} 0 & p & c \\ 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tomando el corchete de Lie $[P, Q] = PQ - QP$, resulta evidente que $[P, Q] = C$ y $[P, C] = [Q, C] = 0$.
Observar que

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & p & c \\ 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & p' & c' \\ 0 & 0 & q' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & pq' - qp' \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces $\mathcal{H}_1' = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{C}\right\}$.

Ahora $\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Entonces $\mathcal{H}_1^{(2)} = 0$. Por lo cual el álgebra de Heisenberg es resoluble.*

Por otro lado, si $L = \mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$, tenemos que $L = L'$ y por lo tanto $L^{(n)} = L$ para todo $n \geq 1$, por lo cual $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ no es resoluble.

Teorema 17. *Sean L_1 y L_2 dos álgebras de Lie y $\varphi : L_1 \to L_2$ isomorfismo entre ellas. Entonces*

1. $\varphi(L_1') = L_2'$.
2. $\varphi\big(Z(L_1)\big) = Z(L_2)$.

La demostración de este resultado queda como ejercicio para el lector.

Ejercicio 1: Sean L_1 y L_2 dos álgebras de Lie. Consideremos $L = L_1 \oplus L_2 = \{(x_1, x_2) : x_i \in L_i\}$ la suma directa de los espacios vectoriales subyacentes. Si definimos $\big[(x_1, x_2), (y_1, y_2)\big] = \big([x_1, y_1], [x_2, y_2]\big)$, probar que L es un álgebra de Lie (la cual se llama *suma directa* de L_1 y L_2).
Probar además que si $L = L_1 \oplus L_2$ entonces $Z(L) = Z(L_1) \oplus Z(L_2)$ y $L' = L_1' \oplus L_2'$.

2. Álgebras de Lie de dimensión baja

En esta sección estudiaremos las álgebras de Lie de dimensiones 1, 2 y 3.

2.1. Álgebras de Lie abelianas.

Las álgebras de Lie abelianas son fáciles de comprender. Para todo número natural n hay un álgebra de Lie abeliana de dimensión n, donde para cualquier par de elementos el corchete de Lie es cero.
Aplicando el Teorema 12 sabemos que esta es única a menos de isomorfismos.

Para entender entonces cuantas álgebras de Lie, esencialmente diferentes (no isomorfas) hay nos concentraremos en las no abelianas.
Sabemos que álgebras de Lie de diferentes dimensiones no pueden ser isomorfas, ya que si lo fueran en particular serían isomorfas como espacios vectoriales, lo que implica que deben tener la misma dimensión. Más aún, si L es no abeliana, entonces su álgebra derivada L' es no nula y su centro $Z(L)$ es un ideal propio. Además, por el Teorema 17, álgebras derivadas y centros se preservan por isomorfismos, así que es razonable usar la dimensión de L y las propiedades de L' y $Z(L)$ para poder clasificar las álgebras de Lie.
A continuación estudiaremos las álgebras de Lie de dimensión 1, 2 y 3.

2.2. Álgebras de Lie de dimensión 1 y 2.

Toda álgebra de Lie de dimensión 1 es abeliana:

Supongamos que L es un álgebra de Lie no abeliana de dimensión 2 sobre $\Bbbk$. El álgebra derivada L' debe tener como mucho dimensión 1, porque si $\{x, y\}$ es una base de L entonces L' esta generado por $[x, y]$. Por otro lado, el álgebra derivada no puede ser cero porque L no es abeliana. Entonces L' tiene exactamente dimensión 1. Consideremos un elemento no nulo $x \in L'$ y completemos a una base $\{x, z\}$ de L tal que $[x, z] \in L'$, este elemento es no nulo (porque L es no abeliana) $\Rightarrow \exists \alpha \in \Bbbk$ tal que $[x, z] = \alpha x$. Podemos cambiar z por $y = \alpha^{-1} z$ de donde $[x, y] = x$.
Acabamos de probar que si un álgebra de Lie de dimensión 2 no abeliana existe, esta admite una base de la forma $\{x, y\}$ tal que $[x, y] = x$.

Ejercicio 2: Sea L un espacio vectorial de dimensión 2 con base $\{x, y\}$. Definimos una función bilineal $[\ ,\ ]$ en L tal que $[u, u] = 0$, para todo $u \in L$. Probar que la identidad de Jacobi se verifica y por lo tanto L es un álgebra de Lie.

Teorema 18. *Para un cuerpo cualquiera $\Bbbk$, a menos de isomorfismos existe una única álgebra de Lie no abeliana de dimensión 2. Esta álgebra admite una base $\{x, y\}$ tal que $[x, y] = x$. El centro de esta álgebra es* 0.

2.3. Álgebras de Lie de dimensión 3.

Sea L un álgebra de Lie de dimensión 3 sobre $\Bbbk$ no abeliana. Sabemos que el álgebra derivada L' es no nula, esta puede tener dimensión 1, 2 o 3. También sabemos que el centro $Z(L)$ es un ideal propio de L. Estudiemos a continuación que podemos decir de L cuando la dimensión de su álgebra derivada es 1, 2 o 3.

• $\dim L' = 1$ y $L' \subset Z(L)$.
En el Ejemplo 1,8 se presentó el álgebra de Heisenberg de dimensión 3, $\mathcal{H}_1$, con base $\{P, Q, C\}$ tal que $[P, Q] = C$ y $[C, P] = [C, Q] = 0$, es decir $C \in Z(\mathcal{H}_1)$.

Veamos que, a menos de isomorfismos, esta es la única álgebra de Lie de dimensión 3 tal que $L' \subset Z(L)$ y $\dim L' = 1$.

Consideremos un álgebra de Lie L con estas condiciones y tomemos $f, g \in L$ tales que $[f, g] \neq 0$. Como estamos asumiendo que $\dim L' = 1$ el corchete $[f, g]$ genera a L'. Además, como $L' \subset Z(L)$ tenemos que $[f, g]$ conmuta con todo elemento de L. Si definimos $z = [f, g]$, entonces $\{f, g, z\}$ es un conjunto LI y por lo tanto una base de L.

• $\dim L' = 1$ y $L' \not\subset Z(L)$.
Tomemos $L = L_1 \oplus L_2$, donde L_1 tiene dimensión 2 y es no abeliana y L_2 tiene dimensión 1.
Aplicando el Ejercicio 1 tenemos que $L' = L_1' \oplus L_2' = L_1'$, entonces L' tiene dimensión 1. Además, $Z(L) = Z(L_1) \oplus Z(L_2) = L_2$ por lo tanto L' no está contenido en L_2.

No hay otras álgebras de Lie con esta propiedad.

Teorema 19. *Sea $\Bbbk$ un cuerpo cualquiera. Existe una única álgebra de Lie sobre $\Bbbk$ de dimensión 3 tal que* $\dim L' = 1$ *y* $L' \not\subset Z(L)$. *Esta álgebra de Lie es la suma directa del álgebra de Lie no abeliana de dimensión 2 con el álgebra de Lie de dimensión 1.*

Demostración. Tomemos un elemento no nulo $x \in L'$, como x no es central existe $y \in L$ tal que $[x, y] \neq 0$.
Afirmación 1: Si $x, y \in L$: $[x, y] \neq 0$ entonces $\{x, y\}$ es LI sobre $\Bbbk$. La prueba de esta afirmación queda como ejercicio para el lector.

Como x es un generador de L' tenemos que $[x, y]$ es múltiplo de x. Como antes podemos asumir que $[x, y] = x$. Extendemos $\{x, y\}$ a $\{x, y, w\}$ una base de L. Nuevamente, como x genera a L' existen escalares $a, b \in \Bbbk$ tales que

$$[x, w] = ax, \quad [y, w] = bx.$$

Afirmación 2: L contiene un elemento central no nulo z que no está en el subespacio generado por x e y: sea $z = \lambda x + \mu y + \nu w \in L$ entonces

$$[x, z] = [x, \lambda x + \mu y + \nu w] = \mu[x, y] + \nu[x, w] = \mu x + \nu a x,$$

$$[y, z] = [y, \lambda x + \mu y + \nu w] = \lambda[y, x] + \nu[y, w] = -\lambda x + \nu b x,$$

$$[w, z] = [w, \lambda x + \mu y + \nu w] = \lambda[w, x] + \mu[w, y] = -\lambda a x - \mu b x.$$

Si tomamos $\lambda = b$, $\mu = -a$ y $\nu = 1$ entonces $[x, z] = [y, z] = [w, z] = 0$ y $z \notin \operatorname{span}\{x, y\}$.
Por lo cual $L = \operatorname{span}\{x, y\} \oplus \operatorname{span}\{z\}$ suma directa de álgebras de Lie de la forma requerida. $\square$

• $\dim L' = 2$.

Estudiemos ahora el caso $\dim L = 3$ y $\dim L' = 2$. Veamos que sobre $\mathbb{C}$ hay infinitas de estas álgebras de Lie no isomorfas.

Tomemos una base $\{y, z\}$ de L' y extendamos a una base $\{x, y, z\}$ de L.

Lema 20. *Sea L' de dimensión 2, $\{y, z\}$ base de L' y $\{x, y, z\}$ base de L entonces*
(a) *L' es abeliana.*
(b) *El mapa $\operatorname{ad} x : L' \to L'$ es un isomorfismo.*

Demostración. (a) Basta probar que $[y, z] = 0$: sabemos que $[y, z] \in L'$ entonces existen $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$: $[y, z] = \alpha y + \beta z$.
La matriz asociada a $\operatorname{ad} y$ con respecto a la base $\{x, y, z\}$ tiene la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & \alpha \\ * & 0 & \beta \end{pmatrix} : * \in \mathbb{k}$$

Veamos que como $y \in L'$ tenemos que $\operatorname{tr}(\operatorname{ad} y) = 0$: dado que $\operatorname{ad} : L \to \operatorname{gl}(L)$ es un homomorfismo de álgebras de Lie tenemos que

$$\operatorname{ad}[v, w] = \operatorname{ad} v \circ \operatorname{ad} w - \operatorname{ad} w \circ \operatorname{ad} v, \ \forall v, w \in L.$$

Entonces $\operatorname{tr}\big(\operatorname{ad}[v, w]\big) = \operatorname{tr}\big(\operatorname{ad} v \circ \operatorname{ad} w - \operatorname{ad} w \circ \operatorname{ad} v\big) = 0$.
Como $\operatorname{tr}(\operatorname{ad} y) = \beta$ concluimos que $\beta = 0$. De igual forma, si consideramos la matriz para $\operatorname{ad} z$ concluimos que $\alpha = 0$, entonces $[y, z] = 0$.

(b) L' está generada por $\big\{[x, y], [x, z], [y, z]\big\}$. Como $[y, z] = 0$ deducimos que $\big\{[x, y], [x, z]\big\}$ es una base de L'. Entonces, la imagen de $\operatorname{ad} x$ tiene dimensión 2, por lo tanto $\operatorname{ad} x : L' \to L'$ es un isomorfismo.

□

Caso 1: Existe $x \notin L'$ tal que $\operatorname{ad} x : L' \to L'$ es diagonalizable.
Podemos asumir que y, z son vectores propios de $\operatorname{ad} x$, por (b) del Lema 20 los valores propios asociados deben ser no nulos. Supongamos $[x, y] = \lambda y$. Podemos asumir que $\lambda = 1$, si reescalamos x por λ^{-1}, tenemos que $[\lambda^{-1} x, y] = y$. Con respecto a la base $\{y, z\}$ de L' el mapa lineal $\operatorname{ad} x : L' \to L'$ tiene matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} : \ \mu \in \mathbb{C} \text{ no nulo.}$$

Ejercicio 3: Sean V espacio vectorial y φ un endomorfismo de V. Sea $L = V \oplus \operatorname{span}\{x\}$. Probar que si definimos en L el corchete $[y, z] = 0$ para todos $y, z \in V$, $[x, y] = \varphi(y)$ para todo $y \in V$, entonces L es un álgebra de Lie y $\dim L' = \operatorname{rango}(\varphi)$. Llamemos L_μ a esta álgebra de Lie. Probar que L_μ es isomorfa a L_ν si y sólo si $\mu = \nu$ o $\mu = \nu^{-1}$.

A partir del ejercicio 3 concluimos que hay infinitas de estas álgebras de Lie no isomorfas.

Caso 2: Para todo $x \notin L'$ el mapa $\operatorname{ad} x : L' \to L'$ no es diagonalizable.
Tomemos $x \notin L'$. Como estamos trabajando sobre los complejos, $\operatorname{ad} x : L' \to L'$ debe tener un vector propio, llamémoslo $y \in L'$. Como antes, podemos renormalizar x y asumir que $[x, y] = y$, extendemos y a una base $\{y, z\}$ de L'. Tenemos que $[x, z] = \lambda y + \mu z$, con $\lambda \neq 0$ (de lo contrario $\operatorname{ad} x$ sería diagonalizable). Reescalando

z podemos suponer $\lambda = 1$. Entonces la matriz asociada a $\operatorname{ad} x : L' \to L'$ tiene la forma

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Como A no es diagonalizable no puede tener dos valores propios diferentes, entonces $\mu = 1$.
Nuevamente, esto determina completamente el álgebra de Lie con las propiedades requeridas. A menos de isomorfismos tenemos una sola de estas álgebras.

- $L' = L$.

Supongamos que L es un álgebra de Lie compleja de dimensión 3 tal que $L = L'$. Veamos que a menos de isomorfismo $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ es la única álgebra de Lie con esta propiedad.

Ejercicio 4: $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C}) = \mathrm{sl}(2, \mathbb{C})'$.

Paso 1: Sea $x \in L$ no nulo entonces $\operatorname{ad} x$ tiene rango 2.
Extendamos x a una base $\{x, y, z\}$ de L. Entonces L' está generado por el conjunto $\{[x, y], [x, z], [y, z]\}$, como $L = L'$ este conjunto es LI. Por lo cual la imagen de $\operatorname{ad} x$ tiene por base $\{[x, y], [x, z]\}$.

Paso 2: Existe $h \in L$ tal que $\operatorname{ad} h : L \to L$ tiene un vector propio con valor propio no nulo.
Consideremos $x \in L$ no nulo, si $\operatorname{ad} x$ tiene un valor propio no nulo podemos tomar $h = x$. Si $\operatorname{ad} x : L \to L$ no tiene valores propios no nulos, como tiene rango 2, su forma de Jordan es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

entonces existe una base $\{x, y, z\}$ de L extendiendo x, tal que $[x, y] = x$, $[x, z] = y$. Por lo tanto $\operatorname{ad} y$ tiene a x como vector propio asociado a -1. Entonces podemos tomar $h = y$.

Paso 3: Por los pasos anteriores podemos encontrar $h, x \in L$ tales que $[h, x] = \alpha x \neq 0$. Como $h \in L = L'$ sabemos que $\operatorname{ad} h$ tiene traza nula. Entonces $\operatorname{ad} h$ puede tener tres valores propios distintos, $-\alpha$, 0 y α. Si y es vector propio asociado a $-\alpha$, entonces $\{h, x, y\}$ es base de L. En esta base $\operatorname{ad} h$ se representa por una matriz diagonal.

Paso 4: Para completar la descripción del álgebra de Lie L necesitamos determinar $[x, y]$.

$$[h, [x, y]] = [[h, x], y] + [x, [h, y]] = \alpha[x, y] - \alpha[x, y] = 0.$$

Tenemos dos aplicaciones del paso 1. Primero $N(\operatorname{ad} h) = \operatorname{span}\{h\}$, entonces $[x, y] = \lambda h$ para algún $\lambda \in \mathbb{k}$. Segundo, $\lambda \neq 0$ porque de lo contrario $N(\operatorname{ad} h)$ tendría dimensión 2. Normalizando x por $\lambda^{-1} x$ podemos suponer $\lambda = 1$.

Si sustituimos h por un múltiplo no nulo podemos tomar cualquier valor de α como queremos. En particular si tomamos $\alpha = 2$ la estructura constante de L que respeta la base $\{x, y, h\}$ coincide con la estructura constante de $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ respecto la base

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Entonces $L \cong \mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$. Por lo tanto, hay una única álgebra de Lie de dimensión tres que coincide con su álgebra derivada.

3. Aplicaciones a economía y finanzas

En esta última sección presentaremos algunos problemas y tópicos en Economía y finanzas que se resuelven empleando la teoría de Lie, además desarrollaremos uno de ellos para familiarizar al lector con las técnicas.

En los trabajos de Lo y Hui [6], [7], [8] se estudió la valoración de derivados multiactivos introduciendo diversas técnicas basadas en álgebras de Lie. Previamente, Lo y Hui ya habían empleado la teoría de Lie para estudiar ecuaciones en derivadas parciales con coeficientes que dependen del tiempo, modelos CEV (elasticidad constante de varianza) y opciones con barrera.

Independientemente, empleando igualmente las álgebras de Lie, Björk y Landén en el trabajo [2] estudiaron problemas financieros correspondientes a la toma de decisiones bajo riesgo por parte de los agentes en el marco de la teoría de las funciones de utilidad. Para este estudio se emplearon los grupos de Lie nilpotentes.

En [1], Basov describió algunos métodos basados en las propiedades de los grupos de Lie para resolver el problema de cribado multidimensional.

En [5] Gaspar obtuvo un modelo general para la estructura de los precios a plazos basándose en la metodología dada por Björk y aplicando las álgebras de Lie.

3.1. Nociones básicas en economía y finanzas.

Se denomina *derivado financiero* a cualquier producto financiero cuyo valor está basado en el precio que posee un determinado activo. Consisten en operaciones hipotéticas cuya liquidación se realiza mediante la diferencia existente entre el precio de mercado del activo y el precio pactado en la operación hipotética.

Los derivados financieros tienen como función eliminar o reducir las consecuencias adversas producidas por cambios desfavorables en el activo sobre el que se define el derivado (es decir, eliminar el riesgo en las operaciones financieras). Además se emplean como un producto financiero basado en la especulación con los precios del activo.

Los *derivados financieros multiactivos*, consisten en productos financieros cuyo valor se basa en el precio que poseen varios activos (y no solamente uno).

Uno de los derivados financieros se denomina *opción*, que es el derecho a comprar o vender un activo en el futuro a un precio pactado. Debe tenerse en cuenta que, al comprar una opción, el comprador paga una prima por disfrutar del derecho adquirido mientras que el vendedor cobra dicha prima. Por tanto, se realiza una transacción en el instante de la contratación de la opción.

Existen dos tipos de opciones estándar: las opciones de *estilo americano* y las de *estilo europeo*. Las primeras son aquellas en las que es posible ejercer derecho de compra-venta en cualquier momento anterior a la fecha de vencimiento del contrato mientras que en las segundas sólo se puede ejercer dicho derecho en la fecha de vencimiento. Cualquier otro tipo de opción se denomina *exótica*. Un caso particular de opciones exóticas son las opciones con barreras. Se denomina *opción con barrera* a toda opción cuya cancelación o activación depende del valor alcanzado durante un período de tiempo determinado por el precio del activo subyacente. Este valor será independiente del valor del activo en la fecha de vencimiento de la opción. Es decir, la activación o cancelación de la opción depende de que el precio del activo alcance unos determinados valores umbrales (de ahí la denominación de opciones con barrera).

Principales tipos y subtipos de opciones de barrera:

1. Opciones con barrera *de entrada* (knock-in): la opción pasa a activarse y a ser estándar si el precio del activo subyacente alcanza el valor fijado en la barrera durante el período acordado.
   a) Opciones *abajo y de entrada* (down-in): la barrera se fija por debajo del precio inicial del activo, activándose la opción cuando el precio llega a ser inferior a la barrera.
   b) Opciones *arriba y de entrada* (up-in): la barrera se fija por encima del precio inicial del activo, activándose la opción cuando el precio es superior a la barrera.
2. Opciones con barrera *de salida* (knock-out): la opción deja de existir o expira sin valor cuando se alcanza el valor
   fijado en la barrera para el precio del activo.
   a) Opciones *abajo y de salida* (down-out): la barrera se fija por debajo del precio inicial del activo, expirando la opción cuando el precio llega a ser inferior a la barrera.
   b) Opciones *arriba y de salida* (up-out): la barrera se fija por encima del precio inicial del activo, expirando la opción cuando el precio llega a ser superior a la barrera.

Las opciones con barrera pueden contratarse de tal modo que la barrera sea doble (es decir, que sea arriba y abajo a la vez) e incluso puede establecerse una barrera móvil, que vaya ajustándose durante toda la vida de la opción hasta alcanzar la fecha de vencimiento.

Cualquier producto financiero presenta la problemática de la fijación de precios. En la fijación de precios, la empresa debe considerar tanto las necesidades del mercado hacia el producto ofertado como el proceso productivo. Para obtener el máximo beneficio posible, se debe buscar el equilibrio entre elegir un precio competitivo y un precio que permita unos márgenes más amplios de ganancia.

A la hora de determinar los precios de un producto financiero suele considerarse el modelo CEV. Este modelo, introducido por Cox (1975), extiende el de Black-Scholes para la fijación de precios e introduce la posibilidad de considerar una volatilidad estocástica. En el modelo CEV, se supone que el precio $S(t)$ del activo sigue el siguiente proceso de difusión en función del tiempo t:

$$dS(t) = \mu(t)S(t)dt + \sigma(t)S(t)^{\beta/2}dZ(t)$$

donde $\mu(t)$ indica la tasa de crecimiento, $\sigma(t)$ es el parámetro de volatilidad, β es el parámetro de elasticidad de la función de volatilidad local y $Z(t)$ es un proceso de Wiener (un proceso de Wiener es un proceso estocástico dependiendo continuamente del tiempo. El ejemplo más conocido de proceso de Wiener es el movimiento Browniano).

3.2. Teoría de Lie y fijación de precios para opciones con barrera móvil y con parámetros temporales.

En esta sección desarrollaremos parcialmente el trabajo de Lo y Hui [8], este trabajo se basa en el Teorema de Wei-Norman ([10]), que nunca se había aplicado al campo de las Finanzas. Lo y Hui ajustan y aplican este modelo basado en las álgebras de Lie al problema de la fijación de precios de las opciones con barrera móvil y con parámetros dependientes del tiempo. Para realizar dicha evaluación supusieron que el valor del activo subyacente sigue el siguiente proceso de difusión CEV:

$$dS(t) = \mu(t)S(t)dt + \sigma(t)S(t)^{\beta/2}dZ(t), \quad 0 \leq \beta < 0. \tag{1}$$

Donde $\mu(t)$ es la media del precio de las acciones en el instante t, $\sigma(t)S(t)^{\beta/2}$ es la varianza instantánea de dicho precio, $dZ(t)$ es un proceso de Wiener y β es el factor de elasticidad.

Partiendo de la ecuación (1), la varianza instantánea del cambio porcentual en el precio se define como $\sigma(t)^2/S(t)^{2-\beta}$.

Teorema de Wei-Norman. Considerar la ecuación diferencial de primer orden de operadores lineales

$$\frac{dU(t)}{dt} = H(t)U(t), \quad U(0) = 1. \tag{2}$$

Donde H y U son operadores lineales dependientes del tiempo en un espacio de Banach o uno de dimensión finita. De acuerdo al Teorema de Wei-Norman si el operador H puede expresarse como

$$H(t) = \sum_{n=1}^{N} a_n(t)L_n, \tag{3}$$

donde a_n son funciones escalares dependientes del tiempo y L_n son generadores de un álgebra de Lie resoluble de dimensión N o generadores del álgebra de Lie simple real split. Entonces, el operador U se expresa como:

$$U(t) = \prod_{n=1}^{N} \exp\big[g_n(t)L_n\big]. \tag{4}$$

Siendo g_n funciones escalares dependientes de la variable t. Para hallar estas funciones simplemente sustituimos las ecuaciones (3) y (4) en (2) y comparamos los dos lados de la igualdad, obteniendo las siguientes ecuaciones diferenciales no lineales:

$$\frac{dg_n(t)}{dt} = \sum_{m=1}^{N} \eta_{nm}a_m(t), \quad g_n(0) = 0, \tag{5}$$

donde η_{nm} son funciones no lineales de las g_n. Entonces, transformamos la ecuación diferencial lineal (2) en un sistema de ecuaciones no lineales acopladas de funciones escalares (5).

Consideremos el siguiente ejemplo para ilustrar esto: los generadores L_n forman el álgebra de Lie de Heisenberg-Weyl definida por las relaciones del corchete

$$[L_1, L_2] = L_3, [L_1, L_3] = [L_2, L_3] = 0, \tag{6}$$

entonces H está dada por

$$H(t) = a_1(t)J_1 + a_2(t)L_2 + a_3(t)L_3. \tag{7}$$

Por el teorema de Wei-Norman $U(t)$ se expresa como

$$U(t) = \operatorname{ext}\big(g_1(t)L_1\big)\operatorname{ext}\big(g_2(t)L_2\big)\operatorname{ext}\big(g_3(t)L_3\big), \tag{8}$$

derivando

$$\frac{dU(t)}{dt}U(t)^{-1} = \frac{dg_1(t)}{dt}L_1 + \frac{dg_2(t)}{dt}L_2 + \left[\frac{dg_3(t)}{dt} + g_1(t)\frac{dg_2(t)}{dt}\right]L_3 \tag{9}$$

Comparando (7) y (9) obtenemos que:

$$\frac{dg_1(t)}{dt} = a_1(t), \quad \frac{dg_2(t)}{dt} = a_2(t), \quad \frac{dg_3(t)}{dt} + g_1(t)\frac{dg_2(t)}{dt} = a_3.$$

Entonces

$$g_1(t) = \int_0^t a_1(\tau)d\tau, \quad g_2(t) = \int_0^t a_2(\tau)d\tau,$$
$$g_3(t) = \int_0^t \big[a_3(\tau) - a_2(\tau)g_1(\tau)\big]d\tau.$$

Lo cual termina de determinar U.

CEV Opción europea. El modelo CEV con parámetros dependientes del tiempo para opciones europeas estándar se describe por la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial P(S,\tau)}{\partial\tau} = \frac{1}{2}\sigma(\tau)^2 S^\beta\frac{\partial^2 P(S,\tau)}{\partial S^2} + \big[r(\tau) - d(\tau)\big]S\frac{\partial P(S,\tau)}{\partial S} - r(\tau)P(S,\tau), \tag{10}$$

para $0 \leq \beta < 0$. En esta ecuación P es el valor de la opción, S es el precio del activo subyacente, τ es el tiempo al vencimiento, σ es la volatilidad, r es la tasa de interés libre de riesgo y d son los dividendos generados. La ecuación (10) puede reescribirse como sigue, mediante el cambio de variable $x = \sqrt{S^{2-\beta}}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial\tau} &= \frac{1}{8}\tilde{\sigma}(\tau)^2\frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\left[\tilde{\mu}(\tau)x - \frac{(4-\beta)\tilde{\sigma}(\tau)^2}{4(2-\beta)x}\right]\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x} + \\ &\left[\frac{(4-\beta)\tilde{\sigma}(\tau)^2}{8(2-\beta)x} - r(\tau)\right]u(x,\tau) \equiv H(\tau)u(x,\tau),\end{aligned} \tag{11}$$

siendo $\tilde{\sigma}(\tau) = (2-\beta)\sigma(\tau)$, $\tilde{\mu}(\tau) = (2-\beta)\big[r(\tau) - d(\tau)\big]$ y $u(x,\tau) = xP(S,\tau)$.

Esta nueva forma de expresar (10) les permitió dar a Lo y Hui una expresión del operador H

$$H(t) = a_1(t)K_+ + a_2(t)K_0 + a_3(t)K_- + b(t), \tag{12}$$

donde

$$K_- = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{4-\beta}{(2-\beta)x}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{4-\beta}{(2-\beta)x^2}\right],$$
$$K_0 = \frac{1}{2}\left(x\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2-\beta}\right), \quad K_+ = \frac{1}{2}x^2,$$
$$a_3(t) = \frac{1}{4}\tilde{\sigma}(t)^2, \quad a_2(t) = \tilde{\mu}(t), \quad a_1(t) = 0,$$
$$b(t) = \frac{1-\beta}{2(\beta-2)}\tilde{\mu}(t) - r(t).$$

Los operadores K_+, K_0 y K_- son los generadores del álgebra de Lie $su(1,1)$:

$$\big[K_+, K_-\big] = -2K_0,$$

$$\big[K_0, K_\pm\big] = \pm K_\pm.$$

Podemos definir el operador evolución $U(t,0)$ tal que

$$u(x,t) = \exp\left[\int_0^t b(\tau)d\tau\right] U(t,0)u(x,0). \tag{13}$$

Sustituyendo esta ecuación en (11) obtenemos la ecuación de evolución

$$\frac{\partial U(t,0)}{\partial t} = H_I(t)U(t,0), \quad U(0,0) = 1, \tag{14}$$

donde $H_I(t) = a_1(t)K_+ + a_2(t)K_0 + a_3(t)K_-$.

Como $su(1,1)$ es un álgebra de Lie real de dimensión 3 simple split, el teorema de Wei-Norman dice que

$$U(t,0) = \exp\big[c_1(t)K_+\big] \exp\big[c_2(t)K_+0\big] \exp\big[c_3(t)K_-\big], \tag{15}$$

donde los coeficientes $c_i(t)$ están dados por

$$c_1(t) = 0, \quad c_2(t) = \int_0^t \tilde{\mu}(\tau)d\tau$$

y

$$c_3(t) = \frac{1}{4}\int_0^t \tilde{\sigma}(\tau)^2 \exp\big[c_2(\tau)\big] d\tau.$$

Entonces, tenemos como hallar el operador de evolución $U(t,0)$ que permite determinar $u(x,t)$ solución de (11).

Referencias

[1] Suren Basov, *Lie Groups of Partial Differential Equations and Their Application to the Multidimensional Screening Problems*, University of Melbourne Economics Working Paper No. 895, 2004.

[2] Tomas Björk and Camilla Landén, *On the construction of finite dimensional realizations for nonlinear forward rate models.* Finance and Stochastics, Vol. 6 Issue 3, pp. 303-331, 2002.

[3] Erdmann and Wildon, *Introduction to Lie algebras.* Springer Undergraduate Mathematics Series, 2011.

[4] Fuentes and López Sandoval, *Introducción a las álgebras de Lie.* 2013.

[5] *Finite dimensional Markovian realizations for forward price term structure models*, Stochastic Finance, M. Grossinho, A. Shyriaev, M. Esquvel, P. Oliveira, eds. , Chapter 10, pp. 265-320, Springer Verlag Publisher, 2006.

[6] Lo and Hui, *Valuation of financial derivatives with time-dependent parameters: Lie-algebraic approach.* Quantitative Finance, Vol. 1, No. 1, pp. 73-78, 2001.

[7] Lo and Hui, *Pricing multi-asset financial derivatives with time-dependent parameters—Lie algebraic approach.* International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences Volume 32, Issue 7, pp. 401-410, 2002.

[8] Lo and Hui, *Lie-algebraic approach for pricing moving barrier options with time-dependent parameters.* Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 323, no. 2, pp. 1455–1464, 2006.

[9] Mozgovoy, *Lecture Notes MA3415: Introduction to Lie algebras.* 2017.

[10] James Wei and Eduard Norman, *Lie algebraic solution of linear Differential Equations.* Journal of Mathematical Physics Vol. 4, pp. 575-581, 1963.

IMERL, Facultad de Ingeniería, Universidad de la República. Montevideo, Uruguay.
Email address: akgdeloss@gmail.com