Publicaciones Matemáticas del Uruguay
Volumen 17, Julio 2019, Páginas 121–123
S 0797-1443

DENDRITACIONES DE SUPERFICIES

ALFONSO ARTIGUE

Resumen. Presentaremos una generalización del concepto de foliación para espacios métricos. En particular estudiamos dendritaciones de superficies, que se definen como atlas maximales de descomposiciones locales semicontinuas en dendritas. Esta estructura tiene aplicaciones en el modelado de conjuntos estable e inestables de sistemas dinámicos topológicos con alguna forma de expansividad.

El propósito de este breve artículo es presentar una *teoría de foliaciones* desde un punto de vista de la *teoría de continuos*. Los detalles se pueden encontrar en [2]. Esta estructura, que en su forma más general es llamada *cw-foliación*, contendrá como casos particulares a las foliaciones de variedades, laminaciones, foliaciones singulares tipo pseudo Anosov y las foliaciones definidas por Hiraide [7] para estudiar a los expansivos con sombreado. La clave de nuestro enfoque es considerar descomposiciones semicontinuas como cartas locales. No se asume que las placas se distribuyan como una estuctura producto, como en las foliaciones de variedades. Incluso, dos placas en una misma carta local pueden no ser homeomorfas.

Las cw-foliaciones forman un marco conceptual para comprender la distribución de los continuos estables e inestables en los sistemas dinámicos que consideraremos. Una motivación para este trabajo es la clasificación de los homeomorfismos cw-expansivos en superficies. Diremos que un homeomorfismo f es *cw-expansivo* si existe $\delta > 0$ tal que si $\operatorname{diam}(f^n(A)) < \delta$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ y A es conexo entonces A contiene sólo un punto. Ejemplos importantes de dinámicas cw-expansivas son los difeomorfismos de Anosov de variedades compactas de cualquier dimensión y los pseudo Anosov de superficies compactas.

Para los difeomorfismos de Anosov los conjutos estables locales forman cartas foliadas, al menos de clase C^0, ver [9]. Si consideramos homeomorfismos de superficies, via [8, 11], sabemos que los conjuntos estables locales forman foliaciones con puntos singulares. Decimos que un homeomorfismo f es *expansivo* si existe $\delta > 0$ tal que si $\operatorname{dist}(f^n(x), f^n(y)) < \delta$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ entonces $y = x$. Hiraide y Lewowicz de forma independiente demostraron que los expansivos de superficies compactas son conjugados a difeomorfismos pseudo Anosov. Si consideramos la cw-expansividad en superficies tenemos que los conjuntos estables locales están lejos de formar foliaciones, incluso singulares. Por ejemplo, pueden no ser una unión finita de arcos, en [1] se construye un homeomorfismo cw-expansivo de una superficie compacta con un punto fijo cuyo conjuto estable local es conexo pero no localmente conexo. Estos ejemplos sugieren que el objetivo de clasificar todos los homeomorfismos cw-expansivos de superficies requiere nuevos métodos.

En [2] introducimos algunas definiciones que se ubican entre la expansividad y la cw-expansividad, que serán llamadas *cwN-expansividad*. En cierto modo, es una versión de la N-expansividad desde un punto de vista de la teoría de continuos. Dado un número natural $N \geq 1$, decimos que f es *N-expansivo* [14] si existe $\delta > 0$ tal que si $A \subset X$ (un subconjunto arbitrario) y $\operatorname{diam}(f^n(A)) \leq \delta$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ entonces A tiene a lo sumo N puntos. Decimos que f es *cwN-expansivo* si existe $\delta > 0$ tal que si $A, B \subset X$ son continuos, $\operatorname{diam}(f^n(A)) < \delta$ para todo $n \geq 0$ y $\operatorname{diam}(f^n(B)) < \delta$ para todo $n \leq 0$ entonces $A \cap B$ tiene a lo sumo N puntos. Además, un homeomorfismo es *cw_F-expansivo* (donde F significa *finito*) si existe $\delta > 0$ tal que si $A, B \subset X$ son continuos, $\operatorname{diam}(f^n(A)) < \delta$ para todo $n \geq 0$ y $\operatorname{diam}(f^n(B)) < \delta$ para todo $n \leq 0$ entonces $A \cap B$ es finito. Estas formas de expansividad nos permiten demostrar la conexión local de los conjuntos estables locales y concluir que son dendritas, ver [2, Theorem 6.7.1]. Recordemos que una dendrita es un continuo de Peano que no contiene curvas cerradas simples, un continuo es un espacio métrico compacto y conexo, y un continuo es de Peano si es localmente conexo. Es sabido que tales dendritas poseen un tamaño uniforme. De esta manera llegamos naturalmente al concepto de descomposición dendrítica.

El tema de las descomposiciones topológicas tiene una literatura diversa, ver por ejemplo [5, 6, 15, 17, 19]. También existen aplicaciones en sistemas dinámicos [1, 3, 4, 10, 16]. Un resultado notable de Moore [12] afirma que el cociente de una descomposición semicontinua de la esfera de dimensión 2 en continuos que no separan es nuevamente la esfera (asumiendo que la descomposición tiene al menos dos elementos, en caso contrario el cociente daría un punto). En cierto sentido, las decomposiciones de Moore generalizan a las foliaciones de dimensión 0, es decir, la descomposición en puntos. Una carta foliada en el sentido usual del cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ por lineas horizontales tiene dos propiedades: cada placa es un arco y el cociente es un arco. En una carta de una dendritación sucede que: cada placa es una dendrita y a su vez el cociente es una dendrita.

El concepto de cwN-expansividad aparece naturalmente del estudio de los artículos [8, 11]. Muchos de sus argumentos únicamente utilizan la cw1 expansividad. Este concepto fue esencialmente considerado previemente en [18]. En [2, Theorem 6.8.5] demostramos que todo homeomorfismo cw1-expansivo de una superficie compacta es expansivo. En espacios no localmente conexos dicho resultado no es cierto, ver [2, Example 5.3.2]. En [2, §2.2.1] se muestra que existen homeomorfismos cw2-expansivos de la esfera de dimensión 2 que no son 2-expansivos.

Para culminar esta breve presentación mencionaremos algunos resultados generales sobre dendritaciones de superficies. En [2, Theorem 6.2.7] se demuestra que para toda dendritación de una superficie cerrada existe un subconjunto residual de puntos sin ramificaciones. En particular, una hoja genérica es una variedad inmersa de dimensión 1. Este resultado es consecuencia de otro resultado de Moore [13], que garantiza que a lo sumo se puede encajar una cantidad numerable de trípodes disjuntos en el plano. En [2, Theorem 6.7.1] consideramos homeomorfismos $\mathrm{cw_F}$-expansivos y demostramos que los conjuntos estable e inestables forman dendritaciones. Además, ninguna hoja es un continuo de Peano, las hojas genéricas son variedades no compactas de dimensión 1 y existe un conjunto denso de puntos de la superficie en los cuales los arcos estables e inestables se cortan transversalmente. En cierto modo, estos resultados ofrecen una imagen global cualitativa de los homeomorfismos $\mathrm{cw_F}$-expansivos de superficies.

Referencias

[1] A. Artigue, *Anomalous cw-expansive surface homeomorphisms*, Discrete and continuous dynamical systems **36** (2016), 3511–3518.

[2] ———, *Dendritations of surfaces*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, posted on 2017, DOI 10.1017/etds.2017.14.

[3] M. Barge and B.F. Martensen, *Classification of expansive attractors on surfaces*, Ergodic Theory and Dynamical Systems **31** (2011), 1619–1639.

[4] A. de Carvalho and M. Paternain, *Monotone quotients of surface diffeomorphisms*, Math. Research Letters **10** (2003), 603–619.

[5] J.J. Charatonik and W.J. Charatonik, *Connected subsets of dendrites and separators of the plane*, Topology and its Applications **36** (1990), 233–245.

[6] R.J. Daverman, *Decompositions of manifolds*, Pure and applied mathematics, Academic Press. Inc, 1986.

[7] K. Hiraide, *Expansive homeomorphisms with the pseudo-orbit tracing property of n-tori*, J. Math. Soc. Japan **41** (1989), 357–389.

[8] ———, *Expansive homeomorphisms of compact surfaces are pseudo-Anosov*, Osaka J. Math. **27** (1990), 117–162.

[9] M. Hirsch, C. Pugh, and M. Shub, *Invariant manifolds*, Lecture notes in mathematics, vol. 583, Springer-Verlag, 1977.

[10] K. Kawamura, H.M. Tuncali, and E.D. Tymchatyn, *Expansive homeomorphisms on Peano curves*, Houston Journal of Mathemtaics **21** (1995), 573–583.

[11] J. Lewowicz, *Expansive homeomorphisms of surfaces*, Bol. Soc. Bras. Mat. **20** (1989), 113-133.

[12] R.L. Moore, *Concerning upper-semicontinuous collections of continua*, Transactions of the AMS **4** (1925), 416–428.

[13] ———, *Concerning Triods in the Plane and the Junction Points of Plane Continua*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **14** (1928), 85–88.

[14] C.A. Morales, *A generalization of expansivity*, Disc. and Cont. Dyn. Sys. **32** (2012), 293–301.

[15] S. Nadler Jr., *Continuum Theory*, Pure and Applied Mathematics, vol. 158, Marcel Dekker, New York, 1992.

[16] A. Passeggi and J. Xavier, *A classification of minimal sets for surface homeomorphisms*, Mathematische Zeitschrift **278** (2014), 1153–1177.

[17] J.H. Roberts, *There does not exist an upper semi-continuous decomposition of E into arcs*, Duke Math. J. **2** (1936), 10–19.

[18] M. Sambarino, *Estructura local de conjuntos estables e inestables de homeomorfismos en superficies*, Universidad de la República, Uruguay, Monograph, 1993.

[19] M. Smith, *A theorem on continuous decompositions of the plane into nonseparating continua*, Proceedings of the AMS **55** (1976), 221–222.

Departamento de Matemática y Estadística del Litoral, Universidad de la República. Gral. Rivera 1350, Salto, Uruguay.

Email address: `artigue@unorte.edu.uy`