Publicaciones Matemáticas del Uruguay
Volumen 17, Julio 2019, Páginas 183–192
S 0797-1443

EL NÚMERO DE ORO, GEOMETRÍA, ÁLGEBRA, ARITMÉTICA

GERARDO GONZÁLEZ SPRINBERG

Abstract. A brief history of the golden number, its continued fraction and the Fibonacci sequence. Relations with regular polygons and polyhedra. Continued fractions of rational and irrational numbers, Lagrange periodicity theorem for quadratic irrationals, and Klein's geometric interpretation. Jung-Hirzebruch continued fractions and two dimensional singularities. Higher dimensional generalizations and a new result on periodicity for a cubic irrational.

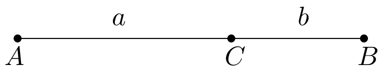
1. Introducción histórica

El número de oro (o número áureo) es probablemente uno de los más emblemáticos ejemplos de varias propiedades

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\,033\,988\,749\,894\,848\,204\,...$$

Los tres puntos suspensivos representan una infinidad de decimales sin periodicidad o regularidad conocidas, por lo que llevaría un tiempo y espacio indefinido explicitarlos! El número de oro es usualmente denotado por la letra giega φ en honor al escultor y arquitecto Fidias quien construyó el Partenón en Atenas. Es ya conocido por los Pitagóricos (en el siglo -6). Estudiado posteriormente por Platón y Eudoxio de Cnide es presentado geométricamente en la Definición 3 del Libro VI de los Elementos de Euclides (en el siglo -3):

"Un segmento de recta se dice estar dividido en extrema y media razón si todo el segmento es al mayor como el mayor es al menor."

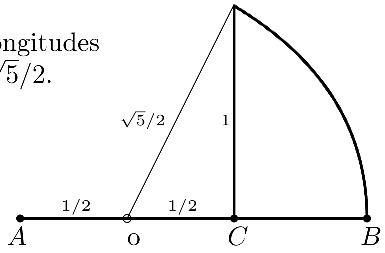


$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

Este cociente es independiente de la longitud del segmento y es denotado φ (o τ de la palabra griega τομη, sección). En la Proposición 30 del Libro VI, Euclides da un método de construcción de la sección en extrema y media de un segmento.

Puede ser probado que el número de oro φ no es el cociente de dos números enteros, i.e. es un número irracional. Este hecho parece haber creado pánico y crisis política entre los Pitagóricos pues para ellos todo era representable por números pero solo conocían los números racionales (esto puede haber sido el origen del nombre "irracional" para estos números). El número φ es un irracional cuadrático, i.e. un número algebraico irracional, raíz de un polinomio de grado 2 con coeficientes enteros. Denotando x al cociente $\frac{a}{b}$ la igualdad $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$ es equivalente a $1 + \frac{1}{x} = x$. Multiplicando esta igualdad por x se obtiene la ecuación polinómica $x^2 - x - 1 = 0$ y φ es la raíz positiva de esta ecuación. La otra raíz (conjugada) es $-1/\varphi$, pues el producto de las dos raices es -1 por la relación entre raíces y coeficientes del polinomio de la ecuación. Notar que $1/\varphi = \varphi - 1$ es la parte fraccionaria de φ. Un segmento de longitud φ es obtenido usando el teorema de Pitágoras (Euclides, Libro IV.10):

Un triángulo rectángulo con catetos de longitudes 1 y 1/2 tiene la hipotenusa de longitud $\sqrt{5}/2$. El segmento AB tiene longitud φ si oB es $\sqrt{5}/2$, donde o es el punto medio de AC de longitud 1.



Relaciones entre φ, Fibonacci, polígonos y poliedros:

Por iteración de la igualdad $\varphi = 1 + 1/\varphi$ se obtiene $\varphi = 1 + 1/(1 + 1/\varphi)$ y así sucesivamente. Se obtiene una expresión de φ llamada *fracción continua*:

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

O más concisa $\varphi = 1 + \frac{1|}{|1} + \cdots + \frac{1|}{|1} + \cdots$. Notar que todos los coeficientes son iguales a 1, con una regularidad que contrasta con la caótica expresión decimal. Conservando solo una parte finita inicial de la fracción continua se obtiene un número racional llamado *convergente* o *reducida* de la fracción continua.
Denotando F_n/F_{n-1} el convergente obtenido con los primeros n términos de la fracción continua de φ, entonces $F_1/F_0 = 1$, $F_2/F_1 = 1 + 1/1$, $F_3/F_2 = 1 + 1/(1 + 1/1)$, $\cdots$, $F_{n+1}/F_n = 1 + 1/(1 + F_n/F_{n-1})$, así que $F_0 = 1$, $F_1 = 1$, $F_2 = 2$, $\cdots$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ si $n \geq 1$.
Esta sucesión de enteros 1 , 1 , 2 , 3 , 5 , 8 , 13 , 21 , ... donde cada término (a partir del tercero) es la suma de los dos precedentes fue introducida en el tratado de aritmética "Liber Abaci" (Libro de cálculos) en 1202 por Leonardo de Pisa, llamado *Fibonacci* (hijo de Bonacci), como solución del célebre problema sobre el número de parejas de conejos que dan nacimiento a una nueva pareja cada mes. [1] Fibonacci también popularizó la notación indo-arabiga de los números usada hasta hoy en día. Los cocientes F_n/F_{n-1} : $(1\ ,\ 2\ ,\ 3/2 = 1.5\ , 5/3 = 1,\overline{6}\ , 8/5 = 1.6\ ,\ 13/8 = 1.625\ ,\ 21/13 = 1.615384615384615\ ,\ \cdots)$ convergen hacia $\varphi = 1.618\cdots$ con valores alternativamente inferiores y superiores.

Algunas propiedades de la sucesión de Fibonacci :

$$(F_n, F_{n+1}) = 1 \quad \text{for} \quad n \geq 0 \quad ; \quad F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = (-1)^n \quad \text{para} \quad n \geq 1$$

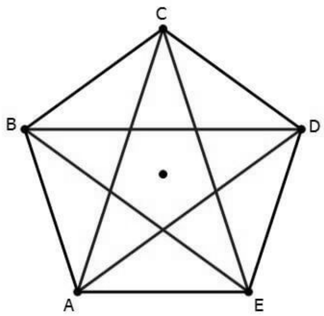
$$|F_{n+1}/F_n - \varphi| \leq 1/F_n^2 \quad ; \quad F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+1} - \varphi'^{n+1}) \text{ donde } \varphi' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

[1] *Nota.* Cada nueva pareja de conejos es un hermano y una hermana, pero la iglesia no criticó este incestuoso problema matemático, aunque Galileo fue excomulgado durante más de tres siglos por "e pur si muove".

$$\begin{array}{llllllll}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
1 & 7 & 21 & 25 & 25 & 21 & 7 & 1
\end{array}$$

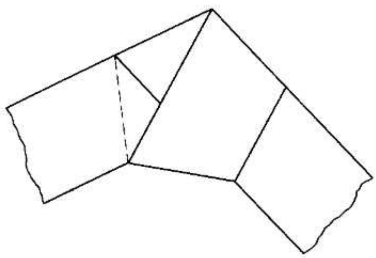
Las sumas de cada diagonal indicada del triángulo de Pascal enderezado "a la china" son los términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci.

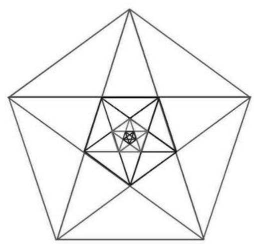
Hay una relación entre φ y π dada por funciones trigonométricas elementales: $\varphi = 2\cos\pi/5$, $1/\varphi = 2\sin\pi/10$, $\varphi = 1 + 1/\varphi = 1 + 2\sin\pi/10$. Por lo tanto hay relaciones entre φ, el pentágono regular, el decágono y poliedros. El cociente entre la longitud de una diagonal y el lado de un pentágono regular es φ. Luego un pentágono regular es obtenido a partir de un "triángulo áureo" ACE (ver figura) y cuyos ángulos son $\widehat{ACE} = \pi/5, \widehat{CAE} = \widehat{CEA} = 2\pi/5$.



(El pentagrama o estrella pentagonal formada por las 5 diagonales del pentágono era usado por los Pitagóricos como símbolo de reconocimiento y fraternidad.)

A causa de los ángulos del pentágono éste puede ser obtenido como un "nudo áureo" a partir de una tira rectangular de papel (ver figura).





Las intersecciones interiores de las diagonales son los cinco vértices de un nuevo pentágono y así indefinidamente hacia el interior o el exterior.[2]
Un decágono regular es también fácilmente obtenido pues el cociente entre el radio y el lado es φ.
Conociendo φ se obtiene también un dodecaedro regular, con 12 pentágonos regulares como caras, 3 en cada vértice (símbolo de Schläfli $(5,3)$), pues

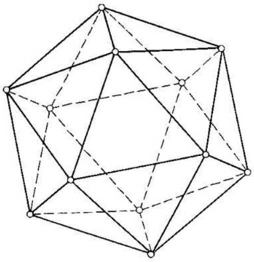
$$(\pm 1, \pm 1, \pm 1), (0, \pm\varphi, \pm 1/\varphi), (\pm 1/\varphi, 0, \pm\varphi), (\pm\varphi, \pm 1/\varphi, 0)$$

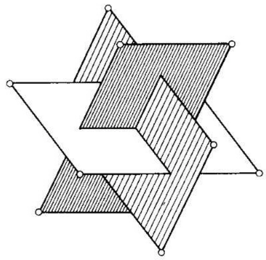
[2] *Nota.* La estrella pentagonal fue usada como logo comercial de una empresa de combustibles y también como logo político de desafío en un pequeño país sudamericano.

son las coordenads de los 20 vértices de un dodecaedro regular.

Los 12 centros de las caras del dodecaedro son los vértices de un icosaedro, dual del dodecaedro, con 20 triángulos equiláteros como caras, 5 en cada vértice (símbolo de Schläfli $(3, 5)$).

Cada par de aristas opuestas paralelas del icosaedro limitan un *rectángulo áureo* con φ como cociente de lados. Hay 30 aristas, 15 rectángulos y 5 tríos de tales rectángulos que son ortogonales.



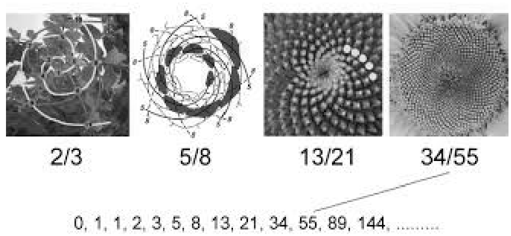


Con coordenadas con respecto a los planos de un tal trío ortogonal de rectángulos los puntos $(0, \pm\varphi, \pm 1)$, $(\pm 1, 0, \pm\varphi)$, $(\pm\varphi, \pm 1, 0)$ son los vértices del icosaedro.

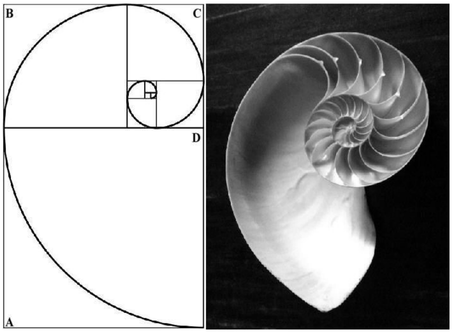
Estos puntos dividen en la proporción $\varphi : 1$ las 12 aristas del octaedro regular con vértices $(\pm\varphi^2, 0, 0), (0, \pm\varphi^2, 0), (0, 0, \pm\varphi^2)$.

Los Elementos de Euclides culminan en el Libro XIII con la construcción de los cinco tipos de poliedros regulares o platónicos, tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro. Los poliedros regulares son conocidos desde tiempos inmemoriales, pues se han encontrado dados neolíticos de piedra en Escocia (datados aproximadamente del año -2000) con las formas de los cinco poliedros regulares, que se encuentran en el Museo de Oxford. Pero el primer estudio matemático formal conocido de estos poliedros es debido a los matemáticos griegos.

El número φ y la sucesión de Fibonacci aparecen sin fin en la naturaleza (e.g en filotaxis, la distribución de hojas a lo largo de tallos de plantas, o una espiral logarítmica en el molusco Nautilus), en arte (e.g. en pinturas y dibujos de Botticelli y Leonardo da Vinci, en esculturas de Fidias), y en música (e.g. en el ciclo de quintas de Pitágoras, en las proporciones de violines de Stradivarius).

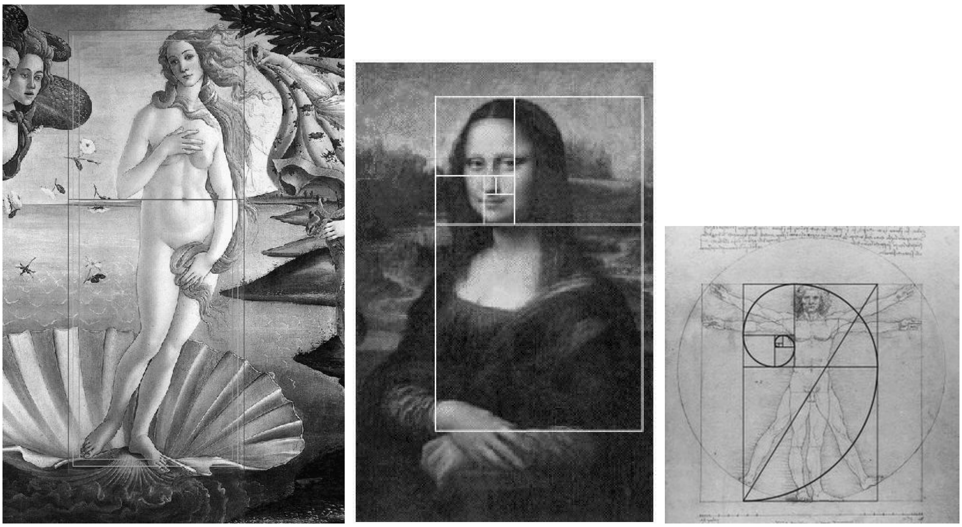


Filotaxis: recorriendo el tallo en espiral, se representa el número de vueltas sobre el número de hojas encontradas por una fracción cacterística de las diferentes especies. Se encuentran cocientes de la sucesión de Fibonacci en girasoles, piñas de pinos, ananás, ...

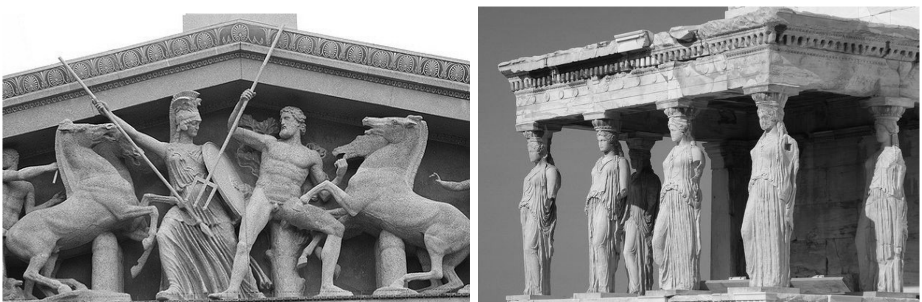


Espiral logarítmica de ecuación polar $\boldsymbol{r = \varphi^{2\theta/\pi}}$ en (r, θ) con polo $\{AC \cap BD\}$ y nautilus

Dividiendo un rectángulo áureo en un cuadrado y otro rectángulo, éste último será también áureo y se puede iterar la división. Inscribiendo un cuarto de círculo en cada cuadrado así construído se obtiene una curva que aproxima una espiral logarítmica (ver figura).



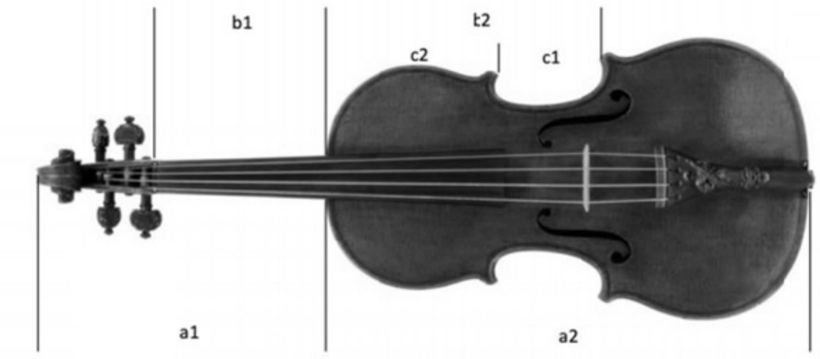
Nacimiento de Venus de Boticelli, La Gioconda y hombre de Leonardo da Vinci.



Friso del Partenón y cariátides en la Acrópolis de Fidias.

Proporciones áureas en violín de Stradivarius.

$$\frac{a1 + a2}{a2} = \frac{a2}{a1} = \frac{b2}{b1} = \frac{b2}{c2} = \frac{c2}{c1} = \phi$$



2. Fracciones continuas de números racionales e irracionales

Las fracciones continuas de números racionales resultan del algoritmo clásico de Euclides. Dado a/b, con a y b enteros (sin factor común), $b > 0$, la división entera $a = bc_0 + r_0$, con c_0 el cociente y r_0 el resto, $0 \leq r_0 < b$, puede ser iterada (finitamente) hasta que el último resto obtenido sea cero : $a/b = c_0 + 1/(b/r_0) = c_0 + 1/(c_1 + 1/(r_0/r_1) = \cdots$

(*Nota.* El último resto no nulo es $mcd(a, b)$. Esta es la presentación original de Euclides, como la medida común entre dos segmentos conmensurables, Libro 7,2.)

Un número es racional si y sólo si su fracción continua es finita.

La expresión decimal puede ser infinita, como $1/7 = 0,\overline{142857}$ con período suprarayado. La fracción continua de un racional es única (con último término > 1 si tiene al menos 2 términos), pero su expresión decimal no es única, e.g. $1,2 = 1,1\overline{9}$.

Se demuestra que *un número es racional si y sólo si su expresión decimal es periódica.*

Este algoritmo puede ser generalizado, notando que el cociente entero es la *parte entera* del racional, i.e. el mayor entero menor o igual al número dado r, notación : $\lfloor r \rfloor$ ("piso" de r).

Si r es un número real irracional, sea $\{r\} = r - \lfloor r \rfloor$ su parte fraccionaria. Entonces también por iteración la fracción continua es obtenida:

$$r = \lfloor r \rfloor + \frac{1}{1/\{r\}} = \lfloor r \rfloor + \cfrac{1}{\lfloor 1/\{r\} \rfloor + \cfrac{1}{1/\{1/\{r\}\}}} = \cdots = c_0 + \cfrac{1}{c_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{c_n + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

$$= c_0 + \frac{1\,|}{|\,c_1} + \cdots + \frac{1\,|}{|\,c_n} + \cdots \qquad \text{Notación: } [c_0, c_1, \cdots, c_n, \cdots]$$

Es una fracción continua infinita pues si no sería un racional. Inversamente *cualquier sucesión infinita de enteros, positivos a partir del segundo, define una fracción continua que converge hacia un número irracional.*

Hemos ya visto el ejemplo notable: $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2 = [1, 1, \cdots, 1, \cdots]$

Es un caso particular de la raíz positiva de $x^2 = ax + 1$ para $a = 1$. Para cualquier entero $a > 0$ su raíz positiva tiene la fracción continua $[a, a, \cdots, a, \cdots]$.
Por ejemplo si $a = 2$, la raíz positiva es $1 + \sqrt{2} = [2, 2, \cdots, 2, \cdots]$. Resulta entonces

$$\sqrt{2} = [1, 2, \cdots, 2, \cdots].$$

(*Nota*: Este número es usado para los formatos estándar pues si la proporción entre los lados de una hoja rectangular de papel es $\sqrt{2}$, entonces al plegarla la proporción es la misma. A partir de una hoja de 1 m^2, $A_0 = 84,1 \times 118,9\ cm$, al plegarla cuatro veces se obtiene el formato usual $A_4 = 21 \times 29,7\ cm$.)

Hay también resultados importantes de fracciones continuas de irracionales *trascendentes* e.g. $e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, \cdots]$ (*Euler*)
o ejemplos de fracciones continuas *generalizadas* (i.e. con numeradores $\neq 1$).

$$e = 2 + \frac{1}{\rceil 1} + \frac{1}{\rceil 2} + \frac{2}{\rceil 3} + \frac{3}{\rceil 4} + \cdots \qquad (Euler, Cesàro)$$

$$\pi = 3 + \frac{1^2}{\rceil 6} + \frac{3^2}{\rceil 6} + \frac{5^2}{\rceil 6} + \frac{7^2}{\rceil 6} + \cdots \qquad (Wallis)$$

Una fracción continua infinita $[c_0, c_1, \cdots, c_n, \cdots]$ es llamada *periódica* si se reproduce periódicamente a partir de un cierto rango, i.e. $[c_0, \cdots, c_{k-1}, \overline{c_k, \cdots, c_{k+n}}]$.
Es *periódica pura* si $k = 0$, i.e. $[\overline{c_0, \cdots, c_n}]$.

Un teorema notable de Joseph-Louis Lagrange prueba que *todo irracional cuadrático tiene una fracción continua periódica.* La proposición inversa, más fácil de probar, era conocida por Leonhard Euler, por lo que hay una equivalencia.
Evariste Galois probó en particular que *una fracción continua es periódica pura si y solo si es un irracional cuadrático* > 1 *cuyo conjugado está entre* 0 *y* 1.

3. Interpretación geométrica de las fracciones continuas.

Sea r un número real positivo y L la semirrecta con equación $y = rx$, de pendiente r, en el primer cuadrante del plano. Sea la fracción continua de r con convergentes $p_n/q_n = [c_0, \cdots, c_n]$.

Felix Klein propuso la interpretación geométrica siguiente. *Si un hilo a lo largo de* L *se aleja de* L *en ambos lados entonces los primeros puntos con coordenadas enteras que encuentra tienen coordenadas* (q_n, p_n) *dadas por los convergentes. Estos puntos son los vértices de dos líneas poligonales que aproximan* L*, una por arriba y la otra por debajo.*

Algunas pruebas y corolarios:

Las relaciones de recurrencia siguientes son probadas por inducción:

$$(1) \quad p_k = c_k p_{k-1} + p_{k-2} \quad , \quad (2) \quad q_k = c_k q_{k-1} + q_{k-2} \quad , \quad (\text{para} \quad k \geq 2)$$

Si se pone $p_{-1} := 1$ y $q_{-1} := 0$, entonces son válidas también para $k = 1$.
La diferencia $[(2)p_{k-1} - (1)q_{k-1}]$ elimina c_k y entonces
$q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1} = -(q_{k-1} p_{k-2} - p_{k-1} q_{k-2})$. como $q_0 p_{-1} - p_0 q_{-1} = 1$ se obtiene

$$(3) \quad q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1} = (-1)^k$$

Reulta de (3) que el representante p_n/q_n de cada convergente is irreducible, pues cualquier divisor de p_n y de q_n es divisor of $(-1)^k$.
Con la diferencia $[(2)p_{k-2} - (1)q_{k-2}]$ se obtiene, por (3),
$q_k p_{k-2} - p_k q_{k-2} = c_k (q_{k-1} p_{k-2} - p_{k-1} q_{k-2}) = (-1)^{k-1} c_k$, luego

$$p_{k-2}/q_{k-2} - p_k/q_k = (-1)^{k-1} c_k / q_k q_{k-2}.$$

En consecuencia *si r es irracional entonces los convergentes de orden par (resp. impar) forman una sucesión creciente (resp. decreciente)*

$$\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_4}{q_4} < \frac{p_6}{q_6} < \cdots < r < \cdots < \frac{p_7}{q_7} < \frac{p_5}{q_5} < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1}$$

Los puntos V_k de coordenadas (q_k, p_k) en el plano están por debajo de la recta L si k es par, y por arriba si k es impar.

Como $q_k = c_k q_{k-1} + q_{k-2} \geq q_{k-1} + q_{k-2} \geq 2q_{k-2}$ sigue $q_k \geq 2^{(k-1)/2}$, y por (3) se obtiene:

Las dos sucesiones convergen hacia el mismo límite, r. Si r is racional, ambas son finitas y una de ellas llega a r. Los puntos con coordenadas dadas por los convergentes tienden monótonamente por debajo y por arriba hacia la recta L.

La igualdad (3) $\quad q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1} = (-1)^k$ puede verse como el determinante de la matriz con vectores columna $V_k = \begin{pmatrix} q_k \\ p_k \end{pmatrix}$ *y* $V_{k-1} = \begin{pmatrix} q_{k-1} \\ p_{k-1} \end{pmatrix}$

Entonces $|\det(V_k, V_{k-1})| = 1$ y se deduce que (V_k, V_{k-1}) es una base de $\mathbb{Z}^2$. El área del triángulo $(0, V_k, V_{k-1})$ es $1/2$, luego sus vértices son sus únicos puntos enteros.

Esto prueba que V_k y V_{k-1} son los puntos enteros más próximos de la semirrecta L en este triángulo, y se ha demostrado la interpretación geométrica de los convergentes de la fracción continua.

La relaciones (1) y (2) pueden ser interpretadas geometricamente: $V_k - V_{k-2} = c_k V_{k-1}$, que significa que el segmento $\overline{(V_{k-2}, V_k)}$ es paralelo a V_{k-1} y lo contiene c_k veces. Luego el número de puntos enteros en $\overline{(V_{k-2}, V_k)}$ es $c_k + 1$.

4. Fracción continua negativa de Jung-Hirzebruch

Una fracción continua con términos negativos ≤ -2 a partir del segundo es obtenida considerando para r racional la división euclídea por exceso, o de manera equivalente para cualquier real r el menor entero $\geq r$, notación: $\lceil r \rceil$ ("techo" de r).

Si r no es entero entonces $\lceil r \rceil = \lfloor r \rfloor + 1$, $r = \lceil r \rceil - (1 - \{r\}) =$.

$$\lceil r \rceil - 1/(1/(1 - \{r\})) = \lceil r \rceil - 1/(\lceil 1/(1 - \{r\}) \rceil - (1 - \{1/(1 - \{r\})\})) = \cdots$$

$$= d_1 - \underline{1 \rceil} \, \overline{d_2} - \cdots - \underline{1 \rceil} \, \overline{d_n} - \cdots \quad \text{Notación: } [d_1, d_2 \cdots, d_n, \cdots]^-$$

$$d_k \geq 2 \text{ si } k > 1$$

Si $0 < a < b$ y b/a es un racional irreducible, se obtienen con la fracción continua de Jung-Hirzebruch todos los puntos enteros próximos por debajo de la semirrecta L en el primer cuadrante de ecuación $y = (b/a)x$,

$$Q_0 = (1, 0), Q_1 = (1, 1), \quad Q_{i+1} = d_i Q_i - Q_{i-1}, i \geq 1$$

Los puntos Q_{i-1}, Q_i, Q_{i+1} están alineados si $d_i = 2$. Hay una relación con la fracción continua ordinaria con la que se obtienen primero los vértices de la poligonal por debajo de L con las reducidas pares y luego todos los puntos enteros en cada segmento de esta poligonal con las reducidas impares.

La fracción continua de Jung-Hirzebruch de φ es más difícil de encontrar:

$$\varphi = [2, \overline{3}]^- = 2 - \underline{1 \rceil} \, \overline{3} - \cdots - \underline{1 \rceil} \, \overline{3} - \cdots$$

Nota histórica: Jung usa este tipo de fracción continua en su método de resolución de singularidades de superficies. La singularidad en el origen en la superficie de ecuación $x^n = yz^p$ después de ser normalizada puede ser descrita como una singularidad tórica, definida por el álgebra asociada al semigrupo de puntos enteros debajo de la semirecta L de ecuación $y = (n/p)x$. Su resolución es obtenida como un abanico de conos limitados por las semirrectas por todos los puntos enteros debajo de L. De hecho estos puntos enteros forman una base (llamada base de Hilbert) del semigrupo. Estas singularidades son esenciales en el método de resolución de Jung. La resolución minimal posee una cadena de curvas racionales en su divisor excepcional (que se contrae en el punto singular), con auto intersecciones dadas por la fracción continua negativa de n/p.

Las fracciones continuas negativas periódicas de irracionales cuadráticos han sido usadas por Hirzebruch para resolver las singularidades cuspidales de Hilbert-Blumenthal. Se obtienen ciclos de divisores excepcionales para estas singularidades elípticas ($h_1 = 1$).

5. Fracciones continuas en dimensión superior

Sea C un cono simplicial en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ y $(e_1, \cdots, e_n)$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$. La adherencia convexa de los puntos no nulos de $C \cap \mathbb{Z}^n$ es llamada el *poliedro de Klein de* C.

El borde del poliedro de Klein es una variedad poliédrica llamada *"vela"*. Si r es un número real positivo , por la interpretación geométrica su fracción continua es equivalente a dar las velas de los conos $\langle e_1, (1, r)\rangle$ y $\langle (1, r), e_2\rangle$, cuyos vértices o puntos angulares corresponden a los convergentes.

Esta equivalencia permite una generalización de fracciones continuas en dimensión superior. Si L es una semirrecta en el octante positivo de $\mathbb{R}^3$, los puntos con coordenadas enteras más próximos a L son los que se encuentran en las velas de los conos $C_1 = \langle L, e_2, e_3\rangle, C_2 = \langle e_1, L, e_3\rangle, C_3 = \langle e_1, e_2, L\rangle$.

También puede darse una descripción matricial de la fracción continua que es generalizable en dimensión superior. Las relaciones de recurrencia (1) y (2) son expresadas como un producto en $GL(2, \mathbb{Z})$:

$$\begin{pmatrix} p_k & p_{k-1} \\ q_k & q_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} c_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Algunos resultados en dimensión 3 (artículo en preparación)

Sea $L_1 = (x_1, y_1, z_1)$ un punto en $\mathbb{R}^3$ con coordenadas positivas que define una semirrecta OL_1 en el octante positivo de $\mathbb{R}^3$. Sea P_1 el primer punto entero más próximo a la semirrecta OL_1. Si P_1 pertenece al cono C_i remplazar e_i por P_1 in la base canónica y denotar por T_1 la matriz de cambio de base. Sea $L_2 = T_1^{-1}L_1$, se itera el procedimiento con respecto a la semirrecta OL_2 y la nueva base y así sucesivamente. La sucesión T_k de matrices de cambio de base pertenece de hecho a $GL(3, \mathbb{Z})$ y es el equivalente matricial de la fracción continua. Las matrices $M_k := T_1 T_2 \cdots T_k$ juegan el rol de los convergentes y se tiene $M_{k-1}L_k = L_1$ para $k \geq 2$.

Ejemplo: la raíz cúbica de 2

$\sqrt[3]{2} = 1.25992104989 \cdots$ es un número cúbico irracional bastante misterioso. Su fracción continua (en dimensión 2) no es periódica por el teorema de Lagrange pues no es un irracional cuadrático y no hay ninguna regularidad

$$\sqrt[3]{2} = [1, 3, 1, 5, 1, 1, 4, 1, 1, 8, 1, 14, 1, 10, 2, 1, 4, 12, 2, 3, 2, 1, 3, 4, 1, 1, 2, 14, 3, 12, 1, 15,\\ 3, 1, 4, 534, 1, 1, 5, 1, 1, 121, 1, 2, 2, 4, 10, \cdots]$$

Resultado: con el procedimiento anterior se obtiene una fracción continua periódica para $r = \sqrt[3]{2}$*, en el sentido que la sucesión de matrices* T_k *tiene un período de longitud 3 a partir del tercer término, para la semirrecta dada por* $L_1 = (1, r, r^2)$ *(base natural de* $\mathbb{Q}[r]$ *sobre* $\mathbb{Q}$*).*

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \overline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}} \right]$$

Los puntos enteros más próximos a la semirrecta, en la base canónica de partida, son columnas de las matrices M_k. Tienen coordenadas que crecen muy rápidamente, como se puede observar con los primeros nueve puntos:

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}12\\15\\19\end{pmatrix},\begin{pmatrix}46\\58\\73\end{pmatrix},\begin{pmatrix}177\\223\\281\end{pmatrix},\begin{pmatrix}681\\858\\1081\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2620\\3301\\4159\end{pmatrix},\begin{pmatrix}10080\\12700\\16001\end{pmatrix},\begin{pmatrix}38781\\48861\\61561\end{pmatrix}$$

El cociente de la segunda sobre la primera (o de la tercera sobre la segunda) coordenada converge rápidamente hacia r.

El cono dado por tres puntos consecutivos contiene la semirrecta y tiene determinante 1, por lo que el tetraedro con vértices estos puntos y el origen contiene solamente los vértices como puntos enteros.

References

[1] N. Beskin. *Fracciones maravillosas.* Ediciones MIR, Moscú, 1987
[2] E. R. Gentile. *Aritmética elemental* Secretaría de la OEA, Publicaciones Matemáticas no. 25, Buenos Aires, 1985
[3] H. S. M. Coxeter. *Regular polytopes* Dover Publications, New York, 1973.
[4] G. Gonzalez Sprinberg. *Éventails en dimension deux et transformé de Nash.* Secrétariat Mathémathique de l'E.N.S., Paris, 1977.
[5] O. Perron.*Die Lehre von den Kettenbrüchen.* Teubner, Germany, 1954

CMat, Facultad de Ciencias, Universidad de la República. Montevideo, Uruguay. Université Grenoble Alpes, France
Email address: gerardogs@cmat.edu.uy