Publicaciones Matemáticas del Uruguay
Volumen 17, Julio 2019, Páginas 227–228
S 0797-1443

CONJUNTOS MINIMALES PARA HOMEOMORFISMOS DEL CíRCULO

ALDO PORTELA

En el estudio de la dinámica de homeomorfismos del círculo es importante conocer los conjuntos minimales.

Sea $f : S^1 \to S^1$ un homeomorfismo. Decimos que un conjunto no vacío de S^1 es minimal si es compacto invariante y minimal respecto a la inclusión. Ejemplos simples de conjuntos minimales son los puntos fijos o las órbitas periódicas de un homeomorfismo. Un punto x de S^1 se llama periódico para f si existe un número natural n mayor o igual a 1 tal que $f^n(x) = x$.

Cuando f no conserva el sentido es fácil probar que f tiene por lo menos dos puntos fijos, y en este caso es simple determinar los conjuntos minimales. En el caso en que f conserva el sentido y tiene puntos periódicos también es simple determinar los conjuntos minimales. Siempre son órbitas periódicas.

Llamamos órbita de x al conjunto $o(x) = \{f^n(x) : n \in Z\}$. También se definen la órbita futura y pasada de x como $o^+(x) = \{f^n(x) : n \in N\}$ y $o^-(x) = \{f^{-n}(x) : n \in N\}$ respectivamente.

En el caso en que f no tiene puntos periódicos la situación es más compleja. De ahora en más vamos a suponer que $f : S^1 \to S^1$ es un homeomorfismo sin puntos periódicos. A continuación vamos a enunciar un conjunto de definiciones y un conjunto de propiedades que no son difíciles de probar. Dado $x \in S^1$ se definen los conjuntos alfa límite y omega límite como,

$$\alpha(x) = \{z : z \text{ es punto de acumulación de } o^-(x)\},$$
$$\omega(x) = \{z : z \text{ es punto de acumulación de } o^+(x)\}.$$

Propiedades:

1. Los conjuntos límites son cerrados y no vacíos.
2. Los conjuntos límites son totalmente invariantes o sea $f(\alpha(x)) = \alpha(x)$ y $f(\omega(x)) = \omega(x)$.
3. Para todo x, $\alpha(x) = \omega(x)$.
4. El conjunto $\alpha(x)$ no depende de x. A dicho conjunto lo llamaremos K.
5. El conjunto K es minimal para f, luego f tiene un solo conjunto minimal.

Teorema 0.1. *Las posibilidades para K son S^1 o un conjunto de Cantor.*

Un ejemplo en el que K es S^1 es cuando el homeomorfismo es una rotación irracional en π. Para un ejemplo en el que el conjunto minimal es un conjunto de Cantor ver los ejemplos de Denjoy. Los ejemplos que construyó Denjoy son minimales para difeomorfismos de clase C^1, [D]. Este trabajo es de 1932. Como en S^1 todo par de conjuntos de Cantor son homeomorfos, conjugando adecuadamente un ejemplo de Denjoy se puede probar que cualquier conjunto de Cantor es minimal para algún homeomorfismo (en este caso decimos que el conjunto de Cantor es C^0- minimal).

O sea todo conjunto de Cantor es C^0- minimal. También en [D] Denjoy prueba que si f es un difeomorfismos de clase C^2 entonces su conjunto minimal es S^1. O sea, ningún conjunto de Cantor es C^2-minimal (minimal para un difeomorfismo de clase C^2). Entonces una pregunta posible, que aún no tiene respuesta, es que conjuntos de Cantor son C^1-minimales. O sea, que conjuntos de Cantor son minimales para algún difeomorfismos de clase C^1.

Sí existen respuestas parciales al respecto:

- En 1981, McDuff prueba que el conjunto de Cantor triádico usual no es C^1-minimal. También da una condición que implica la no C^1 minimalidad [MD].
- En 2002, Alec Norton prueba que los conjuntos afines de Cantor generados por dos ramos crecientes no son C^1 minimales [N]. En este mismo trabajo A. Norton conjetura que los conjuntos hiperbólicos de Cantor no son C^1-minimales.
- En [BIP] se generaliza el resultado de Norton a todo los conjuntos afines de Cantor.

También se conocen otras familias de conjuntos de Cantor que no son C^1-minimales. Ver por ejemplo [P]. En resumen, lo que se conoce hasta ahora es que ciertas familias de conjuntos de Cantor no son C^1 minimales y los únicos conjuntos de Cantor C^1 minimales conocidos son los dados por Denjoy o conjugados a ellos u otros obtenidos dinámicamente. Pero no se conocen, por ejemplo, condiciones geométricas sobre un conjunto de Cantor que impliquen que este sea, o no, C^1-minimal.

En [MD] McDuff enuncia una conjetura que aún está sin resolver.

Sea K un conjunto de Cantor de S^1 y se considera $K^c = \bigcup I_j$ donde I_j son las componentes conexas de K^c. Entonces se llama espectro de K al conjunto $\{\lambda_i\}$ ordenado de forma decreciente estricta donde los λ_i son las medidas de los intervalos I_j. Notar que dado un elemento del espectro de K pueden existir más de una componente conexa de K^c con medida dicho número.

La conjetura de McDuff afirma que si $\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \nrightarrow 1$ entonces el conjunto K no es C^1-minimal. Se pueden ver que en los ejemplos de Denjoy $\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \to 1$ y además es fácil construir conjuntos de Cantor no C^1-minimales tales que $\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \to 1$. También se puede construir conjuntos de Cantor afines (que no son C^1-minimales) que satisfagan que $\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \nrightarrow 1$ y otros en que se satisfaga que $\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \to 1$. En [IP] se puede ver algún avance en la dirección afirmativa de la conjetura.

Referencias

[BIP] L. Bordignon, J. Iglesias, A. Portela. About C^1-minimality of the hyperbolic Cantor sets. Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series, 45 3 45 (2014), 525 - 542.

[D] A. Denjoy. Sur les courbes défines par les équations différentielles á la surface du tore. J. de Math Pure et Appl., 9(11)(1932),333-375.

[IP] J. Iglesias, A.Portela. Dynamically defined Cantor sets under the conditions of Mc Duff's conjecture. Colloquium Mathematicum, 2010.

[MD] D. McDuff. C^1-minimal subsets of the circle. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 31 (1981), 177-193.

[N] A. Norton. Denjoy minimal sets are far from affine. Ergod. Th. & Dynam. Sys., 22 (2002), 1803-1812.

[P] A. Portela. New examples of Cantor sets in S^1 that are not C^1-minimal. Bull Braz Math Soc, New Series 38(4) (2007), 623-633.

IMERL, Facultad de Ingeniería, Universidad de la República. Montevideo, Uruguay.
Email address: `aldo@fing.edu.uy`